١٩٠ ١ ج ١,٢٥

مفكوك الدوال مدني

(أ) في متغير واحد

١ مفكوك تيلور :

حفظ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

يسمى هذا المفكوك بمفكوك الدالة $f(x)$ بدلالة قوى $(x-a)$ أو حول النقطة a .

٢ مفكوك مكلورين :

حفظ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

يسمى هذا المفكوك بمفكوك الدالة $f(x)$ بدلالة قوى x أو حول النقطة $a=0$.

* مفكوك مكلورين لبعض الدوال الخاصة : حفظ

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

(5) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$

مفكوك ذات الحدين

ملحوظة هامة: اذا كان المطلوب في المسألة ايجاد مفكوك إحدى الدوال الخاصة السابقة بدلالة قوى x أو حول النقطة $a=0$

$\Leftarrow$ نستخدم هذه المفكوكات السابقة مباشرة.

أما إذا كان المراد هو ايجاد مفكوك احدى الدوال السابقة بدلالة قوى $(x-a)$ $\Leftarrow$ نستخدم مفكوك تيلور.

Ex (1): اوجد مفكوك الدوال التالية بدلالة قوى x:

(i) e^{-x^2} (ii) $\ln(1-3x)$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

الحل.

(i) $\because e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$\therefore$ نستبدل كل x بـ $(-x^2)$

$$\Rightarrow e^{-x^2} = 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \cdots$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \cdots \quad \#$$

(ii) $\because \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

نستبدل كل x بـ $(-3x)$

$\therefore \ln(1-3x) = -3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} - \cdots$

$= -3x - \frac{9x^2}{2} - 9x^3 - \cdots$ #

(iii) $\because (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$

نضع $m = -\frac{1}{2}$ ونستبدل x بـ x^2.

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 + (-\frac{1}{2})x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(x^2)^2 + \cdots$

$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \cdots$ #

ملحوظة: نكتفي بكتابة أول ثلاثة حدود من المفكوك.

EX(2):

أوجد مفكوك $\sin^2 x$ بدلالة قوى x.

الحل.

$\because \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$= \frac{1}{2}\left[\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2x^2 - \frac{16}{24}x^4 + \frac{64}{720}x^6 - \cdots\right]$

$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \cdots$ #

EX ③:

أوجد مفكوك $\tan x$ بدلالة قوى x

الحل.

$$\because \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots}$$

$$\Longrightarrow \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

#

$$\begin{array}{r|l} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\ \hline 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\ & -\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right) \\ \hline & \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \\ & -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{7!}\right) \\ \hline & \frac{2}{15}x^5 - \frac{x^7}{72} \end{array}$$

(ملحوظة: ننهي القسمة المطولة عندما يظهر الناتج بدلالة ٣ حدود)

EX ④:

أوجد مفكوك $\tan^{-1} x$ بدلالة قوى x

الحل.

$$\because \tan^{-1} x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1+x^2)^{-1}\,dx$$

$$= \int \left[1 + (-1)x^2 + \frac{(-1)(-2)}{2!}(x^2)^2 + \cdots\right] dx$$

$$= \int \left[1 - x^2 + x^4 - \cdots\right] dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + c.$$

⑤ ولإيجاد قيمة c ⇐ نضع $x=0$ في الطرفين

$$\Rightarrow \underset{0}{\tan^{-1}(0)} = 0 + C \Rightarrow \boxed{C=0}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad \#$$

ملحوظة:

$$\sin^{-1}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

ثم أكمل ...

$$\tan^{-1}3x = \int \frac{3}{1+(3x)^2}dx = \int 3(1+9x^2)^{-1}dx$$

ثم أكمل ...

حل المسألة ⑤ من تمارين الكتاب

أوجد مفكوك الدالة التالية بدلالة قوى x:

$$x\cos 2x - \sin 3x.$$

الحل.

$$x\cos 2x - \sin 3x = x\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots\right) - \left(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \left(x - 2x^3 + \frac{16}{24}x^5 - \cdots\right) - \left(3x - \frac{27}{6}x^3 + \frac{243}{120}x^5 - \cdots\right)$$

$$= -2x + \frac{5}{2}x^3 - \frac{163}{120}x^5 + \cdots \quad \#$$

حل المسألة ③ من تمارين الكتاب

أوجد مفكوك الدالة $\ln(1+e^x)$ بدلالة قوى x

الحل.

باستخدام مفكوك مكلورين

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

$\because f(x) = \ln(1+e^x) \Rightarrow f(0) = \boxed{\ln 2}$

$, f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow f'(0) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

$, f''(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow f''(0) = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

$\therefore \ln(1+e^x) = \ln 2 + \dfrac{1/2}{1!} x + \dfrac{1/4}{2!} x^2 + \cdots$

$= \ln 2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} x^2 + \cdots$ //

حل المسألة (16) من تمارين الكتاب

أوجد مفكوك الدالة: $x^4 - 3x^2 - 6x + 8$

حول النقطة $a = 2$.

الحل:

نستخدم مفكوك تيلور

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (x-2)^n$$

$$= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots$$

$\because f(x) = x^4 - 3x^2 - 6x + 8 \Rightarrow f(2) = \boxed{0}$

$f'(x) = 4x^3 - 6x - 6 \Rightarrow f'(2) = \boxed{14}$

$f''(x) = 12x^2 - 6 \Rightarrow f''(2) = \boxed{42}$

$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(2) = \boxed{48}$

$f^{(iv)}(x) = 24 \Longrightarrow f^{(iv)}(2) = \boxed{24}$

$$\therefore x^4 - 3x^2 - 6x + 8 = \frac{14}{1!}(x-2) + \frac{42}{2!}(x-2)^2 + \frac{48}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4.$$

$$= 14(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

//

EX 5 :

أوجد مفكوك $\sqrt{x}$ بدلالة قوى $(x-4)$.

الحل:

$a=4$

باستخدام مفكوك تيلور:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n$$

$$=f(4)+\frac{f'(4)}{1!}(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\cdots$$

$$\because f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f(4)=\boxed{2}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4)=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\text{و } f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} \Rightarrow f''(4)=\boxed{-\frac{1}{32}}$$

$$\therefore \sqrt{x}=2+\frac{1/4}{1!}(x-4)+\frac{-1/32}{2!}(x-4)^2+\cdots$$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2-\cdots \quad \#$$

حل آخر:

$$\because \sqrt{x}=\sqrt{(x-4)+4}=2\sqrt{1+\frac{x-4}{4}}$$

$$=2\left(1+\frac{x-4}{4}\right)^{1/2 \to m}$$

وباستخدام مفكوك مكلورين للدالة $(1+x)^m$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{4}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(\frac{x-4}{4}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2-\cdots \quad \#$$

حل المسألة ⑭ من تمارين الكتاب

أوجد مفكوك $\sin\frac{\pi x}{4}$ بدلالة قوى $(x-2)$.

الحل

باستخدام مفكوك تيلور:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

$$=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\cdots$$

$$\because f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}\Rightarrow f(2)=\boxed{1}$$

$$،\ f'(x)=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}\Rightarrow f'(2)=\boxed{0}$$

$$،\ f''(x)=-\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi x}{4}\Rightarrow f''(2)=\boxed{\frac{-\pi^2}{16}}$$

$$،\ f'''(x)=-\frac{\pi^3}{64}\cos\frac{\pi x}{4}\Rightarrow f'''(2)=\boxed{0}$$

$$،\ f^{(iv)}(x)=\frac{\pi^4}{256}\sin\frac{\pi x}{4}\Rightarrow f^{(iv)}(2)=\boxed{\frac{\pi^4}{256}}$$

$$\therefore \sin\frac{\pi x}{4}=1+\frac{\frac{-\pi^2}{16}}{2!}(x-2)^2+\frac{\frac{\pi^4}{256}}{4!}(x-2)^4+\cdots$$

$$=1-\frac{\pi^2}{32}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{6144}(x-2)^4-\cdots \ \#$$

حل آخر:

$$\because \sin\frac{\pi x}{4}=\sin\left[\frac{\pi}{4}\left((x-2)+2\right)\right]$$

$$=\sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]$$

$$و\ \because \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$\overset{+}{\sin}$	$+$ All
$\overset{+}{\tan}$	$\overset{+}{\cos}$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi x}{4}=\cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]$$

$$=1-\frac{\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]^2}{2!}+\frac{\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]^4}{4!}-\cdots$$

$$=1-\frac{\pi^2}{32}(x-2)^2+\frac{\pi^4}{6144}(x-2)^4-\cdots \ \#$$

حل المسألة (15) من تمارين الكتاب

أوجد مفكوك $\frac{1}{x}$ حول النقطة $a=3$

الحل

باستخدام مفكوك تيلور :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$$

$$=f(3)+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+\cdots$$

$\because f(x)=\frac{1}{x} \Longrightarrow f(3)=\boxed{\frac{1}{3}}$,

$, f'(x)=-\frac{1}{x^2} \Longrightarrow f'(3)=\boxed{-\frac{1}{9}}$,

$, f''(x)=\frac{2}{x^3} \Longrightarrow f''(3)=\boxed{\frac{2}{27}}$

$$\therefore \frac{1}{x}=\frac{1}{3}+\frac{-1/9}{1!}(x-3)+\frac{2/27}{2!}(x-3)^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(x-3)+\frac{1}{27}(x-3)^2-\cdots \quad \#$$

حل آخر :

$$\because \frac{1}{x}=\frac{1}{(x-3)+3}=\frac{1}{3\left[1+\frac{x-3}{3}\right]}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x-3}{3}\right]^{-1\to m}$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+(-1)\left(\frac{x-3}{3}\right)+\frac{(-1)(-2)}{2!}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{9}(x-3)^2-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(x-3)+\frac{1}{27}(x-3)^2-\cdots \quad \#$$

(19) حل المسألة (18) من تمارين الكتاب

أوجد التكامل التالى : $\int_0^x e^{-x^2}dx$ باستخدام مفكوك مكلورين.

الحل

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = \int_0^x \left[1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \cdots\right] dx$$

$$= \int_0^x \left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \cdots\right) dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots \quad \#$$

Uploaded By : Ahmed Badr

حلول التمارين ① مفكوك الدوال

تمارين

[1] $sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots - (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \cdots)}{2}$

$$= \frac{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60}}{2}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \cdots \quad //$$

[2] $x^2 e^{2x} = x^2 [1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots]$

$$= x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots \quad \#$$

[3] $\ln(1+e^x) = f(x)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$\therefore f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$

$\because f(x) = \ln(1+e^x) \Rightarrow f(0) = \boxed{\ln 2}$

$, f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow f'(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$

$, f''(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \Rightarrow f''(0) = \boxed{\frac{1}{4}}$

$\therefore \ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1/4}{2!}x^2 + \cdots$

$\Rightarrow \ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \cdots$ //

[4] $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots$$

②

$\boxed{5}$ $x\cos 2x - \sin 3x$.

$= x\left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots\right] - \left[3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots\right]$

$= x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 - \cdots - \left(3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{243}{120}x^5\right.$

$= -2x + \frac{5}{2}x^3 - \frac{163}{120}x^5 + \cdots$ #

$\boxed{6}$ $x\cot x = x\,\frac{\cos x}{\sin x}$

$= x \cdot \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots} = \frac{x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!}}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}$

$= 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{45} \cdots$

#

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} \\ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \,\big)\, x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} \\ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\ \hline -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{18} \\ \hline -\frac{x^5}{45} \end{array}$$

$\boxed{7}$ $\sin^{-1}x = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int \left[1 + \frac{-1}{2}(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(-x^2)^2\right.$

$\left. + \cdots \right] dx$

$= \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots\right) dx$

$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + C$

1C

let $x = 0$

$\Rightarrow \sin^{-1} 0 = 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow \sin^{-1} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \cdots$

#

8 $\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = (1+x^2)^{1/2} (1-x^2)^{-1/2}$

$= \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2}(x^2)^2 + \cdots\right]\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}x^4 + \cdots\right]$

$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{16}x^6$

$- \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{3}{16}x^8 + \cdots$

$= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \cdots$

9 $\tan^{-1} 3x = \int \frac{3}{1+(3x)^2} dx = \int \frac{3}{1+9x^2} dx$

$= \int 3(1+9x^2)^{-1} dx = \int 3(1 - 9x^2 + (9x^2)^2 - \cdots) dx$

$= \int 3(1 - 9x^2 + 81x^4 - \cdots) dx$

$\tan^{-1} 3x = 3[x - 3x^3 + \frac{81}{5}x^5 - \cdots] + C$

let $x = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$\tan^{-1} 3x = 3x - 9x^3 + \frac{243}{5}x^5 - \cdots$

#

$\boxed{10}$ $\ln\frac{1+2x}{1-2x} = \ln(1+2x) - \ln(1-2x)$

$$= 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots - \left[-2x - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \dots\right]$$

$$= 2x - \cancel{2x^2} + \frac{8}{3}x^3 - \dots + 2 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

$$= 2 + 2x + \frac{16}{3}x^3 + \dots \quad \#$$

$\boxed{11}$ $x\cos x = x\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right]$

$$= x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \dots$$

#

$\boxed{12}$ $\frac{x}{(1+x^2)^2} \longrightarrow$ غير هامة

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^2)^3 + \dots$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots$$

تفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1+x^2)^2} = x - 2x^3 + 3x^5 - \dots$$

#

$\boxed{13}$ $\ln x \; ; \; a = 1. \qquad f(x) = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$, $f''' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$

$$\therefore \ln x = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots$$

14

$$= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \dots \quad \#$$

14 $\sin\frac{\pi x}{4}$, $a = 2$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$

$$= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots$$

$\because f(x) = \sin\frac{\pi x}{4} \Rightarrow f(2) = 1$

$, f'(x) = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4} \Rightarrow f'(2) = 0$

$, f''(x) = -\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi x}{4} \Rightarrow f''(2) = -\frac{\pi^2}{16}$

$, f'''(x) = -\frac{\pi^3}{64}\cos\frac{\pi x}{4} \Rightarrow f'''(2) = 0$

$, f^{(iv)}(x) = \frac{\pi^4}{256}\sin\frac{\pi x}{4} \Rightarrow f^{(iv)}(2) = \frac{\pi^4}{256}$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi x}{4} = 1 + \frac{-\frac{\pi^2}{16}}{2!}(x-2)^2 + \frac{\frac{\pi^4}{256}}{4!}(x-2)^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{32}(x-2)^2 + \frac{\pi^4}{6144}(x-2)^4 \cdots \#$$

---

15 $\frac{1}{x}$; $a = 3$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \cdots$$

$f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, ...

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$f(3) = \frac{1}{3}$, $f'(3) = -\frac{1}{9}$, $f''(3) = \frac{2}{27}$, ...

$$\because f(x) = \frac{1}{3} + -\frac{1}{9}(x-3) + \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{2!}(x-3)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{27}(x-3)^2 - \cdots$$

$\#$

---

16 $f(x) = x^4 - 3x^2 - 6x + 2$; $a = 2$.

$f'(x) = 4x^3 - 6x - 6$, $f''(x) = 12x^2 - 6$

$f'''(x) = 24x$, $f^{(iv)}(x) = 24$, $f^{(v)}(x) = 0$, ...

$\therefore f(2) = 0$, $f'(2) = 14$, $f''(2) = 42$, $f'''(2) = 48$

$f^{(iv)}(2) = 24$

$$\Rightarrow f(x) = 14(x-2) + \frac{42}{2!}(x-2)^2 + \frac{48}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4$$

$\#$

10

$\boxed{17}$ $$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \int \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x}\,dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots\right) dx$$

$$= x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \cdots + c$$

$\boxed{18}$ $$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \int_0^x \left(1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots\right) dx$$

$$= \int_0^x \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \cdots\right) dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \cdots \quad \#$$

$\boxed{19}$ $$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \int_0^x (1+x^4)^{-1/2}\,dx$$

$$= \int_0^x \left[1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)x^4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(x^4)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(x^4)^3\right] dx$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 - \frac{5}{16}x^{12} + \cdots\right) dx$$

$$= x - \frac{x^5}{10} + \frac{3x^9}{72} - \frac{5x^{13}}{208} + \cdots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{24} - \frac{5}{208}x^{13} + \cdots \quad \#$$