TEORIA
DE
ECUACIONES

J. V. USPENSKY

PROFESOR DE MATEMATICAS DE LA UNIVERSIDAD DE STANFORD

LIMUSA
NORIEGA EDITORES
MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

VERSIÓN AUTORIZADA EN ESPAÑOL DE LA OBRA
PUBLICADA EN INGLÉS CON EL TÍTULO:
THEORY OF EQUATIONS

COLABORADORES EN LA TRADUCCIÓN:
J.C. MAQUIEIRA Y J.P. VARELA
DOCENTES DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS
AIRES, ARGENTINA.

BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
☎ 521-21-05
01(800) 7-06-91
512-29-03
cnoriega@mail.internet.com.mx

CANIEM NÚM. 121

SÉPTIMA REIMPRESIÓN

HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-2335-4

TEORIA
DE
ECUACIONES

TEORIA
DE
ECUACIONES

PROLOGO DE LOS EDITORES

El Centro Estudiantes de Ingeniería « La Línea Recta », podemos decirlo con orgullo, tiene y ha tenido una larga y reconocida labor gremial. Mucho se ha hecho en otras épocas en ese sentido y especialmente en el campo de las publicaciones. Y no hablamos aquí de apuntes o de la publicación de pequeñas prácticas, hablamos de obras serias y de jerarquía, como son la edición de libros que se han vendido y se siguen vendiendo en muchos países de habla hispana.

La persecución política que sufriera nuestro Centro, paralizó por varios años toda labor de envergadura. Durante esos años no se pudo hacer mucho. Se siguió adelante, a veces como se pudo, aunque debemos reconocer que lo poco hecho en este período, reviste quizás mucho más valor que lo mucho que se hace ahora.

Es que, una vez vuelta la normalidad, hemos tratado en todas formas de recuperar el tiempo perdido. Improba y larga ha sido esta tarea. Hoy se ve coronada con un éxito: esta publicación. Una publicación que quiere ser, más que nada, un ejemplo de lo que puede hacerse en un clima de trabajo y estudio fecundo, donde la mente y el espíritu pueden actuar tranquila y serenamente. Pero la edición de « Teoría de Ecuaciones » para nosotros no quiere ser solo la coronación de un esfuerzo sino un punto de partida para una labor más amplia y más efectiva. Quisiéramos seguir publicando obras, como esta, que vayan llenando poco a poco todos los vacíos que existen en la bibliografía de habla hispana sobre las materias de nuestra carrera. Cuando eso sea realidad, aún en pequeña parte, habremos realizado entonces uno de nuestros viejos sueños.

Y viene el momento de agradecer a todos los que de una u otra forma han colaborado con nosotros. Estas palabras finales quieren ser para ellos un sentido agradecimiento.

Queremos recordar especialmente en estas líneas a los traductores, el agr. J. C. Maquieira y el ing. Varela, quienes nos han seguido en

todo instante, no sólo con el consejo eficaz sino con el trabajo personal de revisión de las varias correcciones de pruebas. Ellos tienen la mayor parte del mérito.

Unas palabras también para la McGraw Hill que nos ha cedido el permiso para esta traducción.

Y finalmente no podemos dejar de mencionar a los compañeros que han estado a cargo de la Comisión de Publicaciones desde el año 1955 a la fecha, Slemenson, Galtier, Vilas, Peral, Schifini, Estanga y Segre, y a nuestro ex administrador, D. J. Canton, y al actual, J. F. Pregliasco, así como a todas las «manos anónimas» que han hecho de esto una realidad.

COMISION DIRECTIVA

Octubre de 1958.

PROLOGO DEL AUTOR

Este libro fué escrito para ser usado como texto en los cursos dedicados a la teoría de ecuaciones de las universidades y colegios americanos. Por ello es de carácter elemental y, con pocas excepciones, sólo contiene el material que ordinariamente se incluye en textos de esta índole. Pero su presentación se ha hecho tan explícita que el libro puede ser estudiado por los alumnos sin la ayuda del profesor.

Cada tema que se trata en el texto se presenta totalmente desarrollado y no se hace referencia a resultados que se encuentren por sobre el alcance de este libro. Por ello es que, aun cuando contiene, en general, los mismos temas que otros textos de uso corriente, los sobrepasa en tamaño. Unos pocos tópicos que pueden omitirse sin perjuicio se encuentran señalados con estrellitas negras. Numerosos problemas se agregan al final de cada sección principal. En su mayoría son simples ejercicios; pero los que encierran mayores dificultades están señalados con asteriscos.

En cuatro capítulos la exposición difiere de la usual. En el de números complejos, la exposición superficial tan común en muchos libros fué reemplazada por un simple pero completo tratamiento de la teoría de los números complejos. La experiencia del autor le indica que los estudiantes, casi sin excepción, siguen esta presentación sin dificultad.

En el capítulo sobre separación de raíces el autor expone un método muy eficiente para separar raíces reales, muy superior en la práctica al que se basa en el teorema de Sturm. Cree el autor que ningún otro libro menciona este método, que él halló hace mucho tiempo y que ha enseñado a sus alumnos durante varios años.

En el capítulo sobre cálculo numérico de raíces, el método de Horner está presentado en su forma original, incluyendo el proceso de contracción, que lamentablemente ha desaparecido de los textos americanos. Además se hace un estudio completo del error causado por la contracción.

Los determinantes se introducen, no por medio de la definición formal como es usual, sino por sus propiedades características, siguiendo a Weierstrass. La ventaja es evidente, por ejemplo, en la demostración del teorema de multiplicación de determinantes. También se desarrollan en ese capítulo algunas nociones elementales sobre el álgebra de las matrices.

Algunos puntos, debido a su dificultad intrínseca, han sido agrupados en apéndices. El apéndice I trata sobre el teorema fundamental del Algebra. El autor eligió como demostración más intuitiva, y por lo tanto más asequible para los principiantes, la cuarta demostración dada por Gauss.

El apéndice II da la demostración de un teorema de Vincent, en el que se basa el método de separación de raíces antes mencionado.

Los apéndices III y IV fueron agregados por sugerencia del profesor S. P. Timoshenko, por ser de interés para los estudiantes de ingeniería. El apéndice III está dedicado a un criterio simple para que una ecuación tenga todas sus raíces con parte real negativa. El apéndice IV trata la solución por iteración de la ecuación de frecuencia.

El apéndice V da una explicación del método de Graeffe para calcular raíces y es de particular interés en el cálculo de las raíces imaginarias de una ecuación.

J. V. USPENSKY

Universidad de Stanford, California
Diciembre de 1946

La explicación del autor al editor sobre los propósitos de este libro ha sido colocada como prefacio porque llena los requisitos para serlo y expresa su pensamiento.

Nuestro agradecimiento a Max A. Heaslet, del Comité Consultivo Nacional para la Aeronáutica, y a Carl Douglas Olds, del Colegio del Estado de San José, por la ayuda que espontáneamente ofrecieron y prestaron en la edición y corrección de pruebas de este texto de su antiguo profesor. Asumieron esta responsabilidad, que normalmente recae sobre el autor, mientras desarrollaban pesadas tareas propias, ya que el fallecimiento del autor ocurrió inmediatamente después de la entrega del manuscrito a los editores.

L. Z. U.

Mayo de 1948.

INDICE GENERAL

CAPITULO I

NUMEROS COMPLEJOS

1. **¿Qué son los números complejos?** — Las letras empleadas ordinariamente en los cursos elementales de álgebra representan números reales, es decir: enteros y fraccionarios —positivos y negativos—, incluyendo el cero, que son los llamados *números racionales*; y *números irracionales* tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, etc. Sólo ocasionalmente, relacionándolos con la solución de ecuaciones cuadráticas, se mencionan los números imaginarios o complejos. Por ejemplo, al aplicar la fórmula general para hallar las raíces de una ecuación cuadrática, a la ecuación

$$x^2 + x + 3 = 0\,,$$

se dice a los estudiantes que admite las raíces

$$\frac{-1 + \sqrt{-11}}{2}\;;\;\frac{-1 - \sqrt{-11}}{2}$$

donde el símbolo $\sqrt{-11}$ es una cantidad imaginaria puesto que los números negativos no pueden tener raíces cuadradas reales. A los estudiantes se les enseña cómo realizar operaciones con estos números imaginarios por un procedimiento puramente formal; pero no se da ninguna explicación adecuada de los fundamentos de estas operaciones con símbolos que, por sí solos, no tienen ningún significado. Probablemente este procedimiento se justifica, por cuanto a la edad en que los estudiantes se encuentran por primera vez con estos números « imaginarios », no han desarrollado aún una suficiente facultad de abstracción como para entender lo que realmente están tratando, y sólo puede esperarse que adquieran una cierta destreza en las manipulaciones formales. Pero cuando llega el momento de emprender estudios más serios de la parte del álgebra que se llama teoría de ecuaciones, se hace necesario volver a hablar de los números imaginarios o complejos para establecer una base sólida sobre la que descansen los desarrollos subsiguientes.

En lo que sigue, las letras $a, b, c, \ldots$, etc., (con la única excepción de la letra i, que será usada con un significado especial) servirán para designar números reales. Un par ordenado de números reales

$$(a\,;\,b)$$

de los cuales a es la *primera componente* y b es la *segunda componente*, será considerado como una nueva entidad o un nuevo objeto de investigación matemática y de aquí en adelante lo denominaremos *número complejo.* Para poder hacer objeto de investigaciones matemáticas a pares ordenados de números o números complejos, debemos extender a ellos la noción de igualdad y definir asimismo el significado de las cuatro operaciones fundamentales que pueden realizarse con ellos:

adición
sustracción
multiplicación
división.

2. **Definición de Igualdad.** — Dos números complejos $(a; b)$ y $(c; d)$ son *iguales* únicamente si $a = c$ y $b = d$. Los números complejos que no satisfacen esta condición de igualdad se llaman *desiguales.* Para indicar la igualdad se utiliza el signo ordinario $=$. Así, la igualdad

$$(a; b) = (c; d)$$

significa

$$a = c \ ; \ b = d \, .$$

De acuerdo a esta definición

$$(2; \sqrt{12}) = (\tfrac{1}{2}\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \ ; \ 2\sqrt{3})$$

puesto que

$$2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \qquad \text{(¿por qué?)}$$

y

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \, .$$

Por el contrario, los números complejos $(1; -1)$ y $(-1; 1)$ son desiguales, y esto se indica escribiendo

$$(1; -1) \neq (-1; 1) \, .$$

3. **Definiciones de Adición y Multiplicación.** — De las cuatro operaciones fundamentales, la adición y la multiplicación se llaman « operaciones directas » y por medio de ellas se definen las « operaciones inversas »: sustracción y división. Para la adición y multiplicación de los números complejos se adoptan las siguientes definiciones:

Definición de Adición. — La suma de dos números complejos $(a; b)$ y $(c; d)$ es el número complejo $(a + c; b + d)$ obtenido sumando, respectivamente, las primeras y las segundas componentes de los dos

pares dados. Para indicar la adición se usa el signo ordinario de suma, de modo que el contenido de esta definición puede expresarse convenientemente así:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d).$$

Por ejemplo:

$$(1; -1) + (2; 1) = (3; 0),$$
$$(0; 1) + (1; 0) = (1; 1),$$
$$(3; 2) + (-3; -2) = (0; 0).$$

Definición de multiplicación. — El producto de dos números complejos $(a; b)$ y $(c; d)$ es el número complejo $(ac - bd; ad + bc)$. La multiplicación se indica colocando el signo . o $\times$ entre los factores; a veces, cuando no existe peligro de confusiones, puede omitirse el signo de multiplicación. El contenido de la definición puede expresarse convenientemente escribiendo

$$(a; b).(c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

o

$$(a; b)\ (c; d) = (ac - bd; ad + bc).$$

De acuerdo con la definición tenemos, por ejemplo:

$$(2; 3).(1; 2) = (-4; 7),$$
$$(1; -1).(1; 1) = (2; 0),$$
$$(0; 1).(0; 1) = (-1; 0).$$

4. **Leyes Fundamentales de la Adición y Multiplicación.** — Mientras que la definición adoptada para la adición de los números complejos es aceptada inmediatamente como natural por los estudiantes, éstos se quedan perplejos por el carácter aparentemente artificioso de la definición de multiplicación y siempre preguntan las razones por las que se la adopta. Puesto que los números complejos son pares ordenados de nuevos objetos para los que las nociones de igualdad, adición y multiplicación no están definidas inicialmente, es privilegio nuestro definir estas nociones como nos plazca, esforzándonos solamente por hacerlo de modo tal que todas las propiedades fundamentales de las operaciones algebraicas con números reales conserven su validez para los números complejos, y que, además, los números complejos sujetos a tales propiedades puedan reemplazar a los números « imaginarios » hasta ahora sin sentido. Las propiedades fundamentales de la adición y multiplicación de los números reales son las siguientes:

1. $a + b = b + a$. Propiedad conmutativa de la adición.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$. Propiedad asociativa de la adición.

3. $ab = ba$. Propiedad conmutativa de la multiplicación.
4. $(ab)\,c = a\,(bc)$. Propiedad asociativa de la multiplicación.
5. $(a + b)\,c = ac + bc$. Propiedad distributiva.

Es fácil verificar que estas propiedades conservan su validez para los números complejos, con las definiciones de igualdad, adición y multiplicación adoptadas.

Esta verificación inmediata se deja a cargo del estudiante.

5. **Sustracción y División.** — Una vez definida la igualdad, la adición y la multiplicación, podemos definir la sustracción y la división en la misma forma que para los números reales. Restar b de a significa encontrar un número x tal que

$$b + x = a\,.$$

Tal número —diferencia entre a y b— es único. La misma definición puede extenderse a los números complejos.

Definición de sustracción. — Restar el número complejo $(c; d)$ de $(a; b)$ significa hallar un número complejo $(x; y)$, tal que

$$(c; d) + (x; y) = (a; b)\,.$$

Puesto que, por definición de adición, es:

$$(c; d) + (x; y) = (c + x; d + y)\,,$$

las incógnitas x e y deben ser determinadas por las ecuaciones:

$$c + x = a \quad ; \quad d + y = b$$

que admiten la única solución

$$x = a - c \quad ; \quad y = b - d\,.$$

Por lo tanto, la diferencia de $(a; b)$ y $(c; d)$ es un número complejo, unívocamente determinado:

$$(a; b) - (c; d) = (a - c; b - d)\,.$$

En particular, tenemos que:

$$(a; b) - (a; b) = (0; 0)$$

o sea:

$$(a; b) + (0; 0) = (a; b)$$

de modo que el número complejo $(0; 0)$ representa el mismo papel que el 0 para los números reales.

Para definir la división de números complejos podemos también basarnos en la definición de división de números reales. Dividir a por un número real b distinto de cero, significa hallar un número x tal que:

$$bx = a.$$

Por analogía resulta la:

Definición de división. — Dividir el número complejo $(a; b)$ por $(c; d)$ distinto de $(0; 0)$ significa hallar un número complejo $(x; y)$ tal que:

$$(c; d)\,(x; y) = (a; b).$$

Puesto que:

$$(c; d)\,(x; y) = (cx - dy;\, dx + cy)$$

las incógnitas x e y deberán hallarse resolviendo el sistema de ecuaciones

$$cx - dy = a \quad ; \quad dx + cy = b.$$

Eliminando primero y y luego x obtenemos:

$$(c^2 + d^2)\,x = ac + bd$$
$$(c^2 + d^2)\,y = bc - ad.$$

Por hipótesis c y d no se anulan simultáneamente, y, en consecuencia, $c^2 + d^2 > 0$. Por lo tanto x e y tienen valores perfectamente determinados:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \; ; \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

que, como puede comprobarse por simple sustitución, satisfacen el sistema dado. En consecuencia la división por $(c; d) \neq (0; 0)$ nos da un cociente perfectamente determinado que, conservando la notación usual, será:

$$(a; b) : (c; d) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \; ; \; \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

o bien

$$\frac{(a; b)}{(c; d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \; ; \; \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

6. **Números complejos en forma binómica.** — Todo número complejo puede ser escrito en cierta forma llamada *binómica*. En primer lugar:

$$(a; b) = (a; 0) + (0; b).$$

Utilizando la regla de la multiplicación, se comprueba que:

$$(0; b) = (b; 0)\,(0; 1)$$

y por lo tanto:

$$(a; b) = (a; 0) + (b; 0)\,(0; 1)\,,$$

que significa que un número complejo puede expresarse mediante números complejos especiales del tipo $(a; 0)$, con el segundo elemento 0 y un número complejo particular $(0; 1)$ que de aquí en adelante designaremos con la letra i, inicial de la palabra imaginario. Cuando se aplican las operaciones fundamentales a números complejos del tipo $(a; 0)$ se obtienen los siguientes resultados:

$$(a; 0) + (b; 0) = (a + b; 0)\,,$$

$$(a; 0) - (b; 0) = (a - b; 0)\,,$$

$$(a; 0) \;.\; (b; 0) = (ab; 0)\,,$$

$$(a; 0) \;:\; (b; 0) = \left(\frac{a}{b}\,; 0\right),$$

de donde puede extraerse la notable conclusión siguiente: Si a los números complejos con segunda componente 0, se los somete a las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división (operaciones llamadas *racionales*), cualquiera sea la cantidad de veces que se repita cada operación, el complejo resultante tendrá también su segunda componente 0, mientras que la primera componente resultará de realizar las operaciones indicadas con las primeras componentes de los complejos dados. Esto significa que los números complejos con la segunda componente 0 se comportan, con respecto a las operaciones racionales, exactamente como sus primeras componentes, que son números reales. Operando únicamente con tales números complejos, podemos identificarlos, sin temor a confusión, con números reales iguales a sus primeras componentes. Por lo tanto, podemos designar desde ahora en adelante a los números complejos del tipo $(a; 0)$ simplemente por a. De esta manera, el símbolo a tiene dos significados: uno, como símbolo de un número real; otro, como símbolo de un número complejo $(a; 0)$. En tanto tengamos una fórmula que involucre sólo operaciones racionales con tales símbolos, continuará siendo válida ya se interpreten los símbolos de una u otra manera. Por ejemplo, en la identidad:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

los símbolos a; b; $a + b$; $a - b$, pueden ser interpretados como símbolos de números reales o como símbolos de los números complejos $(a; 0)$; $(b; 0)$; $(a + b; 0)$; $(a - b; 0)$, y la identidad será verdadera en ambos casos. De acuerdo con la convención adoptada todo número complejo podrá escribirse en la siguiente *forma binómica*:

$$(a; b) = a + bi$$

donde i está colocado en lugar de $(0;\,1)$ y a, b, son los números complejos $(a;\,0)$, $(b;\,0)$. Por la regla de la multiplicación tenemos:

$$(0;\,1)^2 = (-1;\,0)$$

o, con los signos convencionales adoptados:

$$i^2 = -1\,.$$

Observando que las leyes fundamentales de las operaciones que son válidas para los números reales, siguen siéndolo para los complejos, llegamos a la conclusión de que al efectuar las operaciones fundamentales con números complejos presentados en forma binómica, podemos operar con ellos como si se tratara de binomios algebraicos, teniendo cuidado de reemplazar i^2, cuando aparezca, por -1. Es costumbre usar la notación abreviada bi para los números complejos del tipo $0 + bi$, y, en caso de que $b = \pm 1$, escribir simplemente $a \pm i$ en lugar de $a + 1\,i$ o $a - 1\,i$.

Unos pocos ejemplos mostrarán las ventajas de operar con los números complejos presentados en forma binómica.

Ejemplo 1. Hallar $(1 + i)^3$. Tenemos

$$(1 + i)^2 = 1 + 2\,i + i^2 = 2\,i$$

y

$$(1 + i)^3 = (1 + i)^2\,(1 + i) = 2\,i\,(1 + i) = -2 + 2\,i.$$

El mismo ejemplo puede ser desarrollado en la forma siguiente. Tenemos:

$$(1 + i)^3 = 1 + 3\,i + 3\,i^2 + i^3.$$

Pero:

$$i^2 = -1 \;;\; i^3 = i^2.i = -i$$

y entonces será

$$(1 + i)^3 = 1 + 3\,i - 3 - i = -2 + 2\,i\,.$$

Ejemplo 2. Hallar el cubo del número complejo

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

En primer lugar,

$$\omega^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y luego

$$\omega^3 = \omega\,.\,\omega^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}i^2 = 1\,.$$

Ejemplo 3. Reducir el número complejo

$$\frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)^2(1+2i)}+\frac{1+i}{1-i}$$

a la forma binómica. Tenemos:

$$(3+2i)^2 = 9+12i+4i^2 = 5+12i\,,$$

$$(5+12i)(1-3i) = 5-36i^2-3i = 41-3i\,,$$

$$(3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i\,,$$

$$(8+6i)(1+2i) = 8+12i^2+22i = -4+22i\,.$$

Para efectuar el cociente

$$\frac{41-3i}{-4+22i}$$

podemos, sin que éste varíe, multiplicar numerador y denominador por

$$-4-22i\,,$$

y obtenemos

$$\frac{41-3i}{-4+22i} = \frac{(41-3i)(-4-22i)}{(-4)^2+22^2} = \frac{-230-890i}{500} = -\frac{23}{50}-\frac{89}{50}i\,.$$

En la misma forma,

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

y el resultado final es:

$$-\frac{23}{50}-\frac{39}{10}i\,.$$

Problemas

Reducir a la forma binómica:

1. $7-i+(-6+3i)-(4+3i)$.

2. $(2-3i)i$.

3. $(2+i)(1+2i)$.

4. $\dfrac{1}{i}$.

5. $\dfrac{1+i}{-i}$.

6. $\dfrac{1+i}{i}+\dfrac{i}{1-i}$.

7. $\dfrac{(2+i)(1-2i)}{3-i}$.

8. $\dfrac{(4+3i)(1-2i)}{7-i}$.

9. $\dfrac{(1+i)^3}{1-i}$.

10. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$.

11. $\left(\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

12. $\dfrac{i}{1+i}+\dfrac{i}{1+i}+\dfrac{i}{1+i}$

13. Hallar los valores reales de x e y que satisfacen la ecuación

$$(1 + i)(x + 2y) - (3 - 2i)(x - y) = 8 + 3i.$$

14. Hallar las raíces reales de la ecuación

$$(1 + i)x^3 + (1 + 2i)x^2 - (1 + 4i)x - 1 + i = 0.$$

15. Hallar las raíces reales de la ecuación

$$(1 + i)x^3 + (1 + 2i)x^2 - (1 + i)x - 1 - 2i = 0.$$

7. **Parte real e imaginaria. Números complejos conjugados. Valor absoluto o módulo.** — En un número complejo $a + bi$ expresado en forma binómica, a se llama parte real y b (¡no bi!) parte imaginaria. La parte real y la imaginaria se designan generalmente de la siguiente manera:

$$a = R(a + bi),$$
$$b = I(a + bi),$$

donde R e I son las iniciales de las palabras real e imaginaria. Los números complejos con parte imaginaria nula se llaman números reales, en virtud de su total semejanza con los números reales ordinarios; y los números de la forma bi, con parte real nula se llaman imaginarios puros. En general, los números complejos con parte imaginaria distinta de cero se llaman números imaginarios, simplemente para estar de acuerdo con el uso y la tradición histórica, desde que los números complejos considerados como pares ordenados son justamente tan reales como los otros y nada hay de imaginario en ellos.

Dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$ que sólo difieren en el signo de sus partes imaginarias se llaman *conjugados*. Si designamos a uno de ellos por una sola letra, por ej. A, el conjugado se designa por A_0, o bien por $\bar{A}$. El producto de dos números conjugados

$$A = a + bi \quad ; \quad A_0 = a - bi$$

es un número real

$$AA_0 = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

llamado *norma* de A. La raíz cuadrada positiva de la norma de A se llama *valor absoluto* o *módulo* de A y se designa con el signo $|A|$ o con el signo mod. A. El uso de una u otra notación depende de consideraciones de conveniencia en la escritura o impresión.

Así

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

o

$$\text{mod.}\ (a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si C es la suma de los números complejos A y B

$$C = A + B,$$

será

$$C_0 = A_0 + B_0.$$

Es decir: la suma de los conjugados de dos números complejos es igual al conjugado de su suma. En la misma forma, si C es el producto de los números complejos A y B

$$C = AB,$$

será

$$C_0 = A_0 B_0.$$

Es decir: el producto de los conjugados de dos números complejos es igual al conjugado de su producto. Ambas proposiciones se verifican directamente comparando la suma o el producto de dos números complejos con la suma o el producto de sus conjugados. De esto se deduce que el conjugado de la diferencia o cociente de dos números complejos es igual, respectivamente, a la diferencia o al cociente de sus conjugados, lo cual, con la notación adoptada, se expresa así:

$$(A - B)_0 = A_0 - B_0 \;;\; \left(\frac{A}{B}\right)_0 = \frac{A_0}{B_0}.$$

Por sucesivas aplicaciones de estas reglas se deduce la importante conclusión general que sigue: Si al efectuar operaciones racionales en cantidad finita con los números complejos $A, B, C, \ldots$ se obtiene un número complejo X, al efectuar las mismas operaciones con los conjugados $A_0, B_0, C_0, \ldots$ el resultado será X_0, conjugado de X.

Los números reales coinciden con sus conjugados, y recíprocamente, un número que es igual a su conjugado es real. En efecto, la igualdad

$$a + bi = a - bi$$

requiere que

$$b = -b \quad \text{ó} \quad b = 0.$$

Problemas

Hallar los módulos de los siguientes números:

1. i.

2. $-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $3 + 4i$.

4. $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

5. $x^2 - 1 + 2ix$ donde x es real.

6. $2x - 1 + (2x^2 - 2x)i$ donde x es real.

7. $x^3 - x^2 - x + 1 + (2x^2 - 2x)i$ donde x es real.

8. ¿Cuál es la parte real del número $\dfrac{1-x}{1+x}$ si $x = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$?

9. Hallar un número complejo ε tal que $|\varepsilon| = 1$ y $R(\varepsilon^2) = 0$.

10. ¿Cuáles son los números complejos iguales a: *a*) el cuadrado de sus conjugados y *b*) el cubo de sus conjugados?

★ 8. **Teorema.** — *El módulo de un producto es igual al producto de los módulos de sus factores o, usando la notación adoptada:*

$$|A.B.C...L| = |A|.|B|.|C|...|L|.$$

Demostración: Consideremos primero el producto de dos factores

$$X = AB.$$

La norma de X es:

$$XX_0 = (AB).(AB)_0,$$

pero:

$$(AB)_0 = A_0B_0$$

y por lo tanto:

$$XX_0 = (AB)(A_0B_0);$$

por consiguiente, haciendo uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación:

$$XX_0 = (AA_0).(BB_0),$$

extrayendo raíces cuadradas en ambos miembros, y tomando las raíces positivas:

$$\sqrt{XX_0} = \sqrt{AA_0}\ .\ \sqrt{BB_0}.$$

Pero

$$\sqrt{XX_0} = |X|\ ;\ \sqrt{AA_0} = |A|\ ;\ \sqrt{BB_0} = |B|$$

y por consiguiente,

$$|X| = |A|.|B|,$$

o

$$|AB| = |A|.|B|.$$

Considerando ahora el producto de tres factores

$$X = ABC,$$

hacemos

$$Y = AB,$$

por lo tanto

$$X = YC.$$

Por lo demostrado anteriormente

$$|Y| = |A| \cdot |B| \;;\; X = |Y| \cdot |C|,$$

en consecuencia

$$|X| = |A| \cdot |B| \cdot |C|,$$

o sea

$$|ABC| = |A| \cdot |B| \cdot |C|.$$

De la misma manera puede extenderse el teorema a cualquier número de factores. De este teorema puede extraerse una importante consecuencia: *Si un producto de números complejos es nulo, por lo menos uno de los factores es nulo.* Al suponer

$$ABC \ldots\ldots L = 0,$$

queda establecido que

$$|A| \cdot |B| \cdot |C| \ldots\ldots |L| = |0| = 0$$

y puesto que los factores que figuran en el primer miembro son reales, uno de ellos debe ser nulo. Sea:

$$|A| = 0.$$

Pero, escribiendo $A = a + bi$, tenemos

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0,$$

por lo tanto: $a^2 + b^2 = 0$, que siendo a y b reales, sólo es posible si $a = 0$ y $b = 0$; o sea $A = 0 + 0\,i = 0$. Puede llegarse a la misma conclusión partiendo del hecho de que el cociente está unívocamente determinado cuando el divisor es distinto de cero. Demuéstrelo el estudiante en la misma forma que el teorema anterior. ★

Problemas

1. Demostrar que: $\left|\dfrac{A}{B}\right| = \dfrac{|A|}{|B|}$.

2. ¿Cuál es el módulo de $\dfrac{(4 + 3\,i)\,(1 + i)}{7 - i}$?

3. ¿Cuál es el módulo de $\dfrac{1 + xi}{1 - xi}$ si x es real? ¿Y qué puede decirse del módulo del mismo número si $x = \alpha + i\beta$ es un número complejo, siendo $\beta > 0$?

4. Demostrar que

$$\left| t - \frac{3}{4} i \right| = \frac{1}{4}$$

si

$$t = \frac{i - \tau}{1 + 2 i \tau}$$

y τ es real.

5. Si

$$\tau' = \frac{-3 \tau + 2}{4 \tau - 3}$$

y τ es un complejo tal que

$$\left| \tau - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4},$$

demostrar que

$$\left| \tau' + \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}.$$

★ 9. **Desigualdad del módulo de la suma.** — El módulo de la suma de números complejos no depende simplemente de los módulos de estos números; por lo tanto, no existe para la suma un teorema tan preciso como el del párrafo 8. Tenemos, en cambio, la siguiente proposición, menos precisa, pero que es no obstante, de gran importancia y utilidad:

Teorema. — *El módulo de la suma no es mayor que la suma de los módulos de sus términos, o sea*

$$|A + B + \ldots\ldots + L| \leqq |A| + |B| + \ldots\ldots + |L|;$$

el signo igual sólo será válido cuando todos los números $A, B, \ldots, L$ sean iguales a cero o en el caso de que siendo uno de ellos, por ejemplo A, distinto de cero, todos los cocientes

$$\frac{B}{A}, \ldots\ldots, \frac{L}{A}$$

sean números reales no negativos.

Demostración: Comenzamos con la siguiente observación: Si $A = a + bi$, entonces

$$a = R(A) \leqq |A|$$

y el signo de igualdad sólo será válido si $b = 0$ y $a \geqq 0$.

Siendo:

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

será evidentemente

$$a < \sqrt{a^2 + b^2}$$

si $b \neq 0$. Por otra parte, si $b = 0$ y $a < 0$,

$$|A| = \sqrt{a^2} = -a \ ; \ a < -a.$$

Finalmente, si $b = 0$ y $a \geqq 0$

$$a = \sqrt{a^2} = |A|.$$

Consideremos ahora la suma de dos números complejos A y B. Por la definición de módulo:

$$|A + B|^2 = (A + B)(A + B)_0 = (A + B)(A_0 + B_0),$$

o

$$|A + B|^2 = AA_0 + BB_0 + (AB_0 + A_0B) = |A|^2 + |B|^2 + (AB_0 + A_0B).$$

El conjugado de AB_0 es A_0B, y la suma $AB_0 + A_0B$ de dos números conjugados es el doble de la parte real de AB_0, o sea

$$AB_0 + A_0B = 2\,R\,(AB_0).$$

Por la observación anterior

$$R\,(AB_0) \leqq |AB_0| = |A| \,.\, |B_0| = |A| \,.\, |B|,$$

puesto que los números conjugados tienen el mismo módulo. En consecuencia:

$$|A + B|^2 \leqq |A|^2 + |B|^2 + |A| \,.\, |B| = (|A| + |B|)^2.$$

Pero los números $|A + B|$ y $|A| + |B|$ son positivos y por lo tanto la desigualdad anterior implica que:

$$|A + B| \leqq |A| + |B|.$$

El signo de igualdad sólo es válido si

$$R\,(AB_0) = R\,(A_0B) = |A_0B|$$

y esto sólo es verdad si A_0B es un número real positivo. Suponiendo que $A \neq 0$, el producto AA_0 es un número positivo y

$$\frac{A_0B}{AA_0} = \frac{B}{A}$$

es un número real positivo. Recíprocamente, si esta ecuación es verdadera, entonces $A_0B = \left(\frac{B}{A}\right)(AA_0)$ será real y positivo.

Considerando ahora la suma de tres números

$$A + B + C = (A + B) + C.$$

De acuerdo a lo demostrado anteriormente

$$|(A + B) + C| \leqq |A + B| + |C|,$$
$$|A + B| \leqq |A| + |B|.$$

En consecuencia:

$$|A + B + C| \leqq |A| + |B| + |C|.$$

El signo igual sólo será válido aquí si simultáneamente

$$|A + B| = |A| + |B|$$
$$|(A + B) + C| = |A + B| + |C|.$$

Suponiendo que $A \neq 0$, la primera de estas igualdades sólo es válida si la razón $\frac{A}{B}$ es real y positiva. En tal caso, el número

$$A + B = A\left(1 + \frac{B}{A}\right)$$

no es cero, y

$$1 + \frac{B}{A}$$

es un número positivo. La segunda igualdad exige que la razón

$$\frac{C}{A + B} = \frac{C}{A}\left(1 + \frac{B}{A}\right)^{-1}$$

sea real y positiva, que equivale a la exigencia de que $\frac{C}{A}$ sea real y positiva. Es evidente que, razonando de la misma manera, se demostrará el teorema para sumas de más de tres términos. ★

Problemas

1. Demostrar que

$$|A - B| \geqq |A| - |B| \quad \text{y que} \quad |A - B| \geqq |B| - |A|.$$

SUGESTIÓN: Escríbase $A = B + (A - B)$.

2. Si z es un número complejo con $|z| \leqq 2$, ¿cuál es el máximo de

$$|1 + z + z^2 + z^3|$$

y para qué valor de z se alcanza este máximo?

*** 3.** Si x e y son dos números complejos cualesquiera, demostrar que

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2 .$$

*** 4.** Demostrar que la igualdad

$$|z_2 - z_1|^2 = |z_2 - z_0|^2 + |z_1 - z_0|^2$$

implica que

$$z_2 - z_0 = i\lambda(z_1 - z_0)$$

donde λ es real y recíprocamente.

10. **Raíz cuadrada de un número complejo.** – Hallar la raíz cuadrada de un número complejo A es equivalente a hallar la solución X de una ecuación de segundo grado

$$X^2 = A .$$

Sea $A = a + bi$ y $X = x + iy$. Entonces los números reales x e y deben ser tales que

$$(x + iy)^2 = a + bi .$$

Pero

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi ,$$

en consecuencia, los números reales x e y deben satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$x^2 - y^2 = a \ ; \ 2xy = b . \qquad [1]$$

La identidad

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 ,$$

combinada con las ecuaciones [1] da

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} ,$$

tomando la raíz positiva. Por consiguiente, de la primera ecuación del sistema [1] se deduce:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \ ; \ y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} . \qquad [2]$$

Estas ecuaciones son consecuencias necesarias del sistema [1], pero

pueden tener soluciones que no lo satisfacen. Para separar las soluciones de [2] que satisfagan a [1], debe tomarse en cuenta la ecuación

$$2\,xy = b\,.$$

En caso de que $b \neq 0$, la ecuación determina el signo de y correspondiente a un dado signo de x; es decir, x e y deben ser del mismo signo cuando $b > 0$ y de distinto signo cuando $b < 0$. De acuerdo con esto, las soluciones de la ecuación

$$X^2 = a + bi$$

son:

$$X = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right)$$

en caso de que $b > 0$, y

$$X = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right)$$

en caso de que $b < 0$. Resta por examinar el caso en que $b = 0$. Por ser

$$\sqrt{a^2} = a \quad ó \quad \sqrt{a^2} = -a,$$

según sea $a > 0$ ó $a < 0$, se deduce que

$$x = \pm \sqrt{a} \;;\; y = 0$$

si $a > 0$; y entonces la ecuación

$$X^2 = a$$

tiene dos raíces reales

$$X = \pm \sqrt{a}\,.$$

Si $a < 0$

$$x = 0 \;;\; y = \pm \sqrt{-a}$$

y en este caso la misma ecuación tiene dos raíces imaginarias puras

$$X = \pm\, i \sqrt{-a}\,.$$

Finalmente, cuando $a = b = 0$, sólo existe una solución, trivial $X = 0$.

Esta discusión demuestra que, una vez introducidos los números complejos, todo número complejo tiene raíces cuadradas. La ecuación general de segundo grado

$$AX^2 + BX + C = 0\,,$$

con coeficientes complejos arbitrarios, puede resolverse por medio de la fórmula conocida:

$$X = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,AC}}{2\,A},$$

cuya deducción se basa en las propiedades fundamentales de las operaciones y en la existencia de raíces cuadradas.

Nota: Cuando A es un número real positivo, el símbolo $\sqrt{A}$, por costumbre, significa siempre la raíz cuadrada positiva, y con esta convención la regla de la multiplicación de raíces:

$$\sqrt{A}\,.\,\sqrt{B} = \sqrt{AB}$$

es válida cuando A y B son positivos. Sin embargo, cuando A es un número real negativo o un número imaginario, no puede atribuirse al símbolo $\sqrt{A}$, por medio de una simple convención, un significado tal que la regla de la multiplicación de raíces sea siempre válida. En el caso de un número real negativo o un imaginario A, es necesario especificar siempre a cuál de las dos raíces se refiere el símbolo $\sqrt{A}$ por medio de una condición adicional, como, por ejemplo, que la raíz tenga positiva la parte real o la imaginaria. Así, $\sqrt{-4}$ puede significar $2\,i$ o $-2i$; pero si se especifica que esta raíz debe tener la parte imaginaria positiva, entonces el símbolo $\sqrt{-4}$ vale para $2\,i$. Nótese que la relación de magnitud expresada por las palabras mayor o menor sólo está definida para números reales y no puede ser extendida a los números complejos conservando todas las propiedades de esta relación.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$X^2 = -i\,.$$

En este caso: $a = 0$; $b = -1$; $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, y siendo b negativo,

$$X = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - i\,\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\,\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\,.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$X^2 = -5 + 12\,i.$$

En este caso

$$a = -5\ ;\ b = 12\ ;\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\frac{\sqrt{169} - 5}{2} = 4\quad;\quad\frac{\sqrt{169} + 5}{2} = 9$$

y siendo b positivo:

$$X = \pm\,(2 + 3\,i)\,.$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación de segundo grado

$$i\,X^2 - (2 + 2\,i)\,X + 2 - i = 0\,.$$

Aplicando la fórmula tenemos

$$X = \frac{2 + 2i \pm \sqrt{-4}}{2i}$$

y tomando $\sqrt{-4} = 2i$; se hallan las raíces

$$-i \ ; \ 2 - i.$$

Problemas

Hallar las raíces cuadradas de los números:

1. i.

2. $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $-3 - 4i$.

5. $-13 - 84i$.

6. $-1 + i\sqrt{24}$.

7. $x^2 - 1 + 2xi$; siendo x real.

Resolver las ecuaciones de segundo grado:

8. $x^2 + x + 1 = 0$.

9. $2x^2 - 3x + 2 = 0$.

10. $x^2 - (2 + 3i)x - 1 + 3i = 0$.

11. $(2 - 2i)x^2 - (11 + 9i)x - 16 + 6i = 0$.

Resolver las ecuaciones:

12. $x^4 = 1$.

13. $x^4 = -1$.

14. $x^4 + 4 = 0$.

15. $x^4 = 119 - 120i$.

16. $x^3 - 1 = 0$. Nótese que: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

17. $x^3 = i$.

18. $x^6 - 1 = 0$.

19. $x^6 + 1 = 0$.

20. $x^3 = 1 + i$. Haciendo $x = a + bi$; será entonces $a^3 + 3ab^? = 1$; $3a^2b - b^3 = 1$, y además: $a^2 + b^2 = \sqrt[3]{2}$.

21. Demostrar la siguiente proposición: Si a; b; a'; b', son números racionales, pero $\sqrt{b}$ no es racional y

$$a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'},$$

entonces

$$a' = a \ ; \ b' = b.$$

22. Hallar todas las ecuaciones de segundo grado: $x^2 + px + q = 0$ con coeficientes racionales pero sin raíces racionales, en las que: *a*) una raíz es el cuadrado de la otra; *b*) una raíz es el cubo de la otra.

*** 23.** Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ son dos números complejos tales que la razón $\frac{b}{a}$ es un núme-

ro real positivo, la raíz cuadrada $\sqrt{ab}$ puede elegirse de modo tal que la razón de la media geométrica de a y b

$$b_1 = \sqrt{ab}$$

a la media aritmética

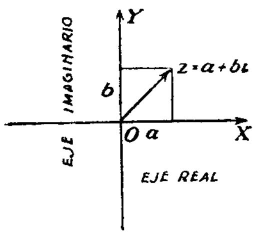
$$a_1 = \frac{a+b}{2}$$

tenga una parte positiva real. Demostrar que, en ese caso, es también $R\left(\frac{b_1}{a}\right) > 0$.

* **24.** Con las mismas condiciones del problema anterior demostrar que

$$|b_1 - a_1| < \frac{1}{2}|b - a|.$$

11. **Representación geométrica de los números complejos.** — Las relaciones entre los números complejos y su manejo se hacen intuitivos, mediante una simple representación geométrica. Habiendo elegido dos rectas perpendiculares OX; OY como ejes coordenados, atribuímos a OX una cierta dirección, indicada en la figura por una flecha, y elegimos entonces una dirección del eje OY tal que, al rotar OX un ángulo recto en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, su dirección coincida con la de OY.

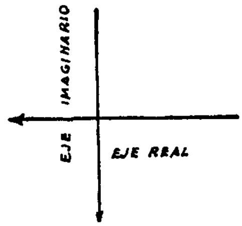


Cada punto del plano, referido al sistema de coordenadas elegido, tiene coordenadas definidas —a y b por ejemplo— y el complejo $a + bi$ está definido por este punto. Recíprocamente, a todo número complejo hacemos corresponder un punto cuyas coordenadas son, respectivamente, la parte real y la imaginaria de ese número complejo. De esta manera, entre los números complejos y los puntos del plano existe una correspondencia biunívoca en virtud de la cual los números complejos están representados por puntos. Los números complejos de la forma $a + 0\,i$ —números reales— están representados por puntos del eje OX, que por esta razón se llama *eje real.* Los números complejos de la forma $0 + bi$ o números imaginarios puros están representados por puntos del eje OY, llamado *eje imaginario.* Es costumbre designar al punto representativo del complejo z por la misma letra y llamarlo simplemente punto z. Así, podemos hablar del punto O (origen); del punto 1; del punto i; del punto $3 - 2\,i$; etc. El punto O, junto con z, determina un segmento dirigido $\overrightarrow{Oz}$ o vector $\overrightarrow{Oz}$, que va del origen O al extremo z. Recíprocamente, el extremo de todo vector $\overrightarrow{Oz}$ determina un número complejo. En esta forma tenemos otra representación geométrica de los números complejos por medio de vectores con el origen común en O. Las proyecciones del vector que representa a $z = a + bi$ sobre los ejes

OX y OY son, respectivamente, a y b; y la longitud del vector Oz —o la distancia de O a z— por el teorema de Pitágoras es $\sqrt{a^2 + b^2}$ y nos da un significado intuitivo del módulo de z.

Problemas

1. Si la dirección del eje real se elige como en la figura, ubicar los puntos representativos de los números complejos: *a*) -1 ; *b*) i; *c*) $1 - i$; *d*) $1 + 2i$; *e*) $-3 - 2i$; *f*) $-\frac{1}{2} + 2i$.



2. Si $R(z) = \frac{1}{2}$ ¿qué puede decirse sobre el lugar geométrico de los puntos z?

3. Resolver el problema 2 si los números complejos z satisfacen la condición:

$$-\frac{1}{2} < R(z) \leqq \frac{1}{2}.$$

4. ¿Cuál es la posición relativa de los puntos que representan números complejos conjugados?

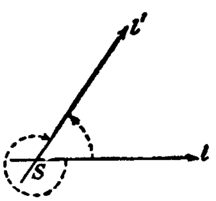
5. ¿Cuál es la posición relativa de los puntos que representan los números complejos

$$a + bi \text{ y } b + ai?$$

6. ¿Cuál es el significado geométrico de: *a*) $|z| = 1$; *b*) $|z| < 1$; *c*) $|z| > 1$?

7. ¿Dónde están los puntos representativos de z si $-\frac{1}{2} \leqq R(z) < \frac{1}{2}$ y $|z| \geqq 1$?

12. **Angulo de dos semirrectas dirigidas.** — La figura siguiente representa dos semirrectas dirigidas l y l' que se cortan en un punto S con sus direcciones representadas por flechas. Por ángulo entre l y l' —medido de l a l'— que indicaremos por (ll'), entendemos el ángulo que debe girar l alrededor de S para coincidir con l' en posición y dirección, considerándose este ángulo como positivo o negativo según que l rote en el sentido opuesto al de las agujas del reloj o en el mismo sentido que las agujas del reloj respectivamente. Desde este punto de vista el ángulo (ll') no está unívocamente determinado sino que tiene infinitos valores, cuya vinculación puede establecerse de la siguiente manera:



Sea ϕ el menor ángulo positivo que debe girar l para coincidir con l' en posición y dirección. Si se continúa la rotación en sentido positivo, volverá a coincidir cuando el ángulo rotado sea $\phi + 2\pi$ (midiendo los ángulos en radianes); nuevamente coincidirá cuando este ángulo sea $\phi + 4\pi$ y, en general, cuando sea $\phi + 2k\pi$, siendo k un número entero positivo. Asimismo, haciendo rotar l en sentido negativo del ángulo cuyo valor absoluto es $2\pi - \phi$, las rectas l y l' coinciden en posi-

ción y dirección y lo mismo sucede después de una rotación, en sentido negativo, de la magnitud $2k\pi - \phi$, siendo k entero y positivo. Tomando todos estos ángulos negativamente, podemos decir que l' forma con l los ángulos negativos $\phi - 2\pi$; $\phi - 4\pi$; $\phi - 6\pi$; ... Por lo tanto, la expresión general para el ángulo (ll') es: $\phi + 2k\pi$ siendo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ un entero arbitrario y ϕ el menor ángulo positivo entre l y l'. Es fácil ver que ϕ puede expresar cualquier ángulo entre l y l'; y aún que todos los valores posibles de éste serán de la misma forma. Los ángulos que difieren de múltiplos de 2π se dicen congruentes de módulo 2π (expresión extraída de la teoría de los números), y se usa el signo $\equiv$ para expresar la congruencia. En este sentido tenemos una congruencia evidente que es:

$$(ll') \equiv -(l'l) .$$

Además, si tres semirrectas l; l'; l'' pasan por el mismo punto, es fácil verificar que:

$$(ll') + (l'l'') + (l''l) \equiv 0 ,$$

por consiguiente, en virtud de la congruencia $(l''l) \equiv -(l\,l'')$, se desprende que:

$$(l\,l'') \equiv (ll') + (l'l'') .$$

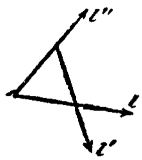
A pesar de la multiplicidad del ángulo (ll') las funciones trigonométricas de este ángulo:

$$\operatorname{sen}(ll') \quad ; \quad \cos(ll')$$

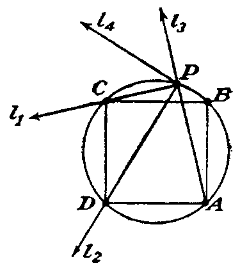
tienen valores completamente determinados debido a que sen x y cos x son funciones periódicas de período 2π.

Problemas

1. Los lados de un triángulo equilátero tienen direcciones dadas como se indica en la figura. ¿Cuáles son los valores numéricamente menores de los ángulos: *a*) (ll'); *b*) (ll''); *c*) $(l'l'')$?



2. Se inscribe un cuadrado $ABCD$ en un círculo y se toma un punto P sobre el arco BC. ¿Cuáles son los ángulos: *a*) (l_1l_3); *b*) (l_4l_2); *c*) (l_1l_2), formados por los pares de semirrectas l_1, l_2, l_3, l_4 de la figura?



3. Tres semirrectas l, l', l'' se cortan en un mismo punto. Si $(l'l) = 230°$; $(l''l) = -100°$, hallar el valor numéricamente menor del ángulo $(l''l')$.

4. Si cinco semirrectas l_1; l_2; l_3; l_4; l_5 se cortan en el mismo punto y: $(l_2l_1) = 30°$; $(l_3l_1) = -200°$; $(l_4l_2) = 300°$; $(l_5l_4) = -90°$, ¿cuál es el valor numéricamente menor del ángulo (l_3l_5)?

13. **Forma trigonométrica de un número complejo.** — Volviendo a la representación geométrica de los números complejos explicada en el Párrafo 11, sea θ el ángulo comprendido entre el eje real y el vector $\overrightarrow{Oz}$. Este ángulo se llama *argumento o amplitud* de z. Está definido sólo para $z \neq 0$ y tiene infinitos valores que difieren entre sí en múltiplos de 2π. Si $z = a + bi$, a es la proyección de $\overrightarrow{Oz}$ sobre el eje real. Llamando r al módulo de z

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,;$$

de la definición de $\cos\theta$ se desprende que

$$a = r\cos\theta\,.$$

Dado que el ángulo que forman los ejes real e imaginario es $\frac{\pi}{2}$, el ángulo entre $\overrightarrow{Oz}$ y el eje imaginario será $\left(\frac{\pi}{2}\right) - \theta$, y la proyección de $\overrightarrow{Oz}$ sobre éste será

$$b = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,.$$

En consecuencia, $z = a + bi$ puede escribirse en la forma

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

que es la llamada *forma trigonométrica* de un número complejo. No importa cuál de los posibles valores de θ se tome; en la práctica sin embargo, es conveniente elegir el menor valor numérico del argumento. Para expresar un número complejo dado $a + bi$ en forma trigonométrica debemos hallar primero el módulo r con la fórmula

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y luego hallar el ángulo θ de menor valor numérico tal que

$$\cos\theta = \frac{a}{r}\,;\ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{b}{r}\,.$$

En general, será necesario para ello usar tablas trigonométricas y en ese caso, es siempre más ventajoso determinar el ángulo por su tangente. En efecto, en el caso de que sea $\frac{b}{a} > 0$ se determina el ángulo agudo ω por su tangente

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{b}{a}$$

y se toma: $\theta = \omega$ si $a > 0$, y $\theta = \omega - \pi$ si $a < 0$. En el caso de que sea $\frac{b}{a} < 0$, el ángulo agudo ω se determina por:

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{b}{a}$$

y $\theta = -\omega$ si $a > 0$; $\theta = \pi - \omega$ si $a < 0$.

Problemas

Exprésense en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

1. -4.

2. i.

3. $-6i$.

4. $-1 + i$.

5. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. $\sqrt{3} - i$.

8. $1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$.

9. $-4 - 3i$.

10. $-2 + i$.

11. $1 + \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$.

12. $\cos\alpha + \cos\beta + i(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)$.

14. **Multiplicación y división de números complejos dados en forma trigonométrica. Fórmula de De Moivre.** — Las reglas de la multiplicación y la división son particularmente simples cuando los complejos están dados en forma trigonométrica. Sean

$$A = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \;\; ; \;\; B = r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta') .$$

Multiplicando y agrupando factores en el segundo miembro, tenemos que

$$AB = rr'(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta') .$$

Pero

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta') =$$
$$= \cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' + i(\operatorname{sen}\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta'\cos\theta)$$

y por otra parte:

$$\cos\theta\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta' = \cos(\theta + \theta')$$
$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta'\cos\theta = \operatorname{sen}(\theta + \theta');$$

por lo tanto:

$$AB = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta' + \theta)]$$

que significa que: *el módulo del producto es el producto de los módulos de los factores y el argumento es la suma de los argumentos.* Por sucesivas

aplicaciones esta regla se extiende a cualquier número de factores. El producto de n factores

$$\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1 \;;\; \cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2 \;;\; \ldots\ldots \;;\; \cos\theta_n + i \operatorname{sen}\theta_n$$

cuyos módulos son todos iguales a 1, es:

$$(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \ldots\ldots (\cos\theta_n + i \operatorname{sen}\theta_n) =$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n).$$

En particular, cuando $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = \theta$, esta fórmula nos da una importante identidad:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\,\theta + i \operatorname{sen} n\,\theta\,,$$

conocida como fórmula de De Moivre. Por supuesto, n significa aquí un entero positivo. Teniendo en cuenta que:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{-1} = \frac{1}{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} =$$
$$= \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)$$

y elevando ambos miembros de la ecuación a la potencia n, obtenemos:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{-n} = \cos(-n\,\theta) + i \operatorname{sen}(-n\,\theta)\,.$$

Por lo tanto la fórmula de De Moivre es válida también para exponentes enteros negativos.

En cuanto al cociente de dos números complejos

$$A = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \;;\; B = r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')\,,$$

puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\frac{A}{B} = \frac{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}{r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')} = \frac{r}{r'}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')^{-1}.$$

Pero

$$(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')^{-1} = \cos(-\theta') + i \operatorname{sen}(-\theta')$$

y de acuerdo a la regla establecida para la multiplicación:

$$\frac{A}{B} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')].$$

Por lo tanto: *el módulo del cociente es igual al cociente de los módulos y el argumento a la diferencia de argumentos del dividendo y del divisor.*

Problemas

Hallar la expresión general para los siguientes casos (siendo n entero):

1. $(\sqrt{3}+i)^n$.

2. $[1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})]^n$.

3. $\left(\dfrac{1+\text{sen}\,\phi+i\cos\phi}{1+\text{sen}\,\phi-i\cos\phi}\right)^n$.

4. $[\text{sen}\,\theta-\text{sen}\,\phi+i\,(\cos\theta-\cos\phi]$.

5. Dado

$$(1+x)^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots,$$

donde

$$p_0 = 1 \;;\; p_1 = \frac{n}{1} \;;\; p_2 = \frac{n\,(n-1)}{1.2} \;;\; \ldots$$

son los coeficientes del desarrollo del binomio, y tomando $x = i$, demostrar que:

$$p_0 - p_2 + p_4 - \ldots = 2^{1/2^n} \cos\frac{n\pi}{4}.$$

$$p_1 - p_3 + p_5 - \ldots = 2^{1/2^n} \text{sen}\,\frac{n\pi}{4}.$$

* **6.** Tomando en el mismo desarrollo $x = 1$; ω; ω^2, siendo

$$\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

hallar las sumas

(a) $p_0 + p_3 + p_6 + \ldots$

(b) $p_1 + p_4 + p_7 + \ldots$

(c) $p_2 + p_5 + p_8 + \ldots$

Nótese que: $1 + \omega^n + \omega^{2n} = 0$, si n no es múltiplo de 3, pero es igual a 3 si n es un múltiplo de 3.

* **7.** Tomando: $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ en la identidad

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}.$$

demostrar que:

$$1 + 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + \ldots + 2\cos(n-1)\,\theta = \frac{\text{sen}\,(n-\frac{1}{2})\,\theta}{\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta}$$

$$\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta + \ldots + \text{sen}\,(n-1)\,\theta = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos(n-\frac{1}{2})\,\theta}{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta}.$$

* **8.** Utilizando un método análogo, demostrar que

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2n-1)\,\theta = \frac{\text{sen}\,2n\theta}{2\,\text{sen}\,\theta},$$

$$\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,3\theta + \ldots + \text{sen}\,(2n-1)\,\theta = \frac{1-\cos 2n\theta}{2\,\text{sen}\,\theta}.$$

* **9.** Por medio de la fórmula de De Moivre expresar: *a*) $\cos 3\,\phi$ en función de $\cos \phi$ y $\operatorname{sen} 3\,\phi$ en función de $\operatorname{sen} \phi$; *b*) $\cos 5\,\phi$ en función de $\cos \phi$ y $\operatorname{sen} 5\,\phi$ en función de $\operatorname{sen} \phi$; *c*) $\cos 4\,\phi$ en función de $\cos \phi$ y $\operatorname{sen} 4\,\phi$ en función de $\operatorname{sen} \phi$.

* **10.** Expresar: *a*) $\operatorname{sen}^5 \phi$ en función lineal de: $\operatorname{sen} \phi$; $\operatorname{sen} 3\,\phi$; $\operatorname{sen} 5\,\phi$; *b*) $\operatorname{sen}^4 \phi$ en función lineal de: $\cos 2\,\phi$; $\cos 4\,\phi$.

15. **Solución trigonométrica de ecuaciones binómicas.** — Por medio de la fórmula de De Moivre es posible representar todas las raíces de la ecuación binómica

$$X^n = A\,,$$

donde $A \neq 0$ es un número complejo cualquiera dado en forma trigonométrica. Sea

$$A = r\,(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

y tomemos la incógnita X también en forma trigonométrica:

$$X = R\,(\cos \Theta + i \operatorname{sen} \Theta)\,.$$

Será, entonces:

$$X^n = R^n\,(\cos n\,\Theta + i \operatorname{sen} n\,\Theta)$$

y esta expresión debe ser igual a:

$$A = r\,(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)\,.$$

Puesto que los números complejos iguales tienen iguales módulos, debe ser:

$$R^n = r\,;$$

en consecuencia R queda determinado sin ambigüedad por la raíz *enésima* positiva de r:

$$R = \sqrt[n]{r}\,.$$

Además los argumentos de números complejos iguales difieren solamente en múltiplos de $2\,\pi$, de modo que:

$$n\,\Theta = \theta + 2\,k\pi$$

siendo k entero. En consecuencia, la expresión que nos da las raíces X es:

$$X = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\theta + 2\,k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\,k\pi}{n}\right).$$

En esta expresión es k un entero cualquiera, pero el número de raíces distintas será sólo n. Para obtenerlas basta tomar en esta fórmula $k = 0$;

1; 2; ... ; $n-1$. Porque si k es un entero cualquiera, dividiéndolo por n y llamando l al resto, tendremos:

$$k = nq + l\,,$$

donde $0 \leqq l < n$, de modo que l será uno de los números: 0; 1; 2; ... ; $n-1$. Pero:

$$\frac{\theta + 2\,k\pi}{n} = \frac{\theta + 2\,l\pi}{n} + 2\,\pi q\,,$$

por lo tanto:

$$\cos\frac{\theta + 2\,k\pi}{n} = \cos\frac{\theta + 2\,l\pi}{n}\,,$$

$$\operatorname{sen}\frac{\theta + 2\,k\pi}{n} = \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\,l\pi}{n}\,,$$

lo que demuestra lo enunciado. Por otra parte, las n raíces obtenidas tomando $k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\ ; n-1$ son distintas. Suponiendo que para dos valores dados de k —llamémoslos k' y k''— hallamos raíces iguales, en ese caso será:

$$\cos\frac{\theta + 2\,k'\pi}{n} = \cos\frac{\theta + 2\,k''\pi}{n}\ ;\ \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\,k'\pi}{n} = \operatorname{sen}\frac{\theta + 2\,k''\pi}{n}$$

y esto es posible sólo si

$$\frac{\theta + 2\,k''\pi}{n} = \frac{\theta + 2\,k'\pi}{n} + 2\,\pi q$$

siendo q entero; o sea:

$$k'' - k' = nq\,.$$

Pero $k'' - k'$ es numéricamente menor que n y no puede ser divisible por n a menos que sea igual a cero; por lo tanto, k'' y k' no pueden ser dos números diferentes como supusimos.

Por lo tanto todas las raíces de la ecuación binómica

$$X^n = r\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\,,$$

están dadas por la fórmula

$$X = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\,k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\theta + 2\,k\pi}{n}\right)$$

tomando en ella: $k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\ ; n-1$.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación.

$$x^4 = -4$$

Siendo

$$-4 = 4(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$$

la fórmula para las raíces es:

$$x = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right).$$

Haciendo en ella $k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;$ hallamos que los valores de las cuatro raíces son:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i,$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i,$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i,$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x^3 = -8i.$$

En forma trigonométrica será:

$$-8i = 8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

por lo tanto

$$x = 2\left[\cos\frac{(4k-1)\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{(4k-1)\pi}{6}\right].$$

Haciendo aquí: $k = 0;\ 1;\ 2;$ obtenemos las siguientes raíces:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i.$$

Problemas

Expresar en forma trigonométrica las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $x^4 = -16i$.

2. $x^4 = 1 + i$.

3. $x^3 = -2i$.

4. $x^3 = 1 - i$.

5. $x^4 = \omega;\ \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. $x^3 = \omega$.

7. $x^6 = -4$.

8. $x^6 = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\,i$.

9. Resolver algebraicamente el Problema 4 y hallar las expresiones para cos 15° y sen 15°.

10. En la misma forma, resolver algebraica y trigonométricamente la ecuación

$$x^4 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

11. Resolviendo la ecuación: $x^5 = i$, algebraica y trigonométricamente, demostrar que:

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt[5]{176 + 80\sqrt{5}}};\quad \operatorname{sen} 18^\circ = \frac{1}{\sqrt[5]{176 + 80\sqrt{5}}}.$$

Por otra parte (véase el Párrafo 16):

$$\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4};\quad \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

¿Cómo pueden conciliarse estas expresiones?

16. **Raíces de la unidad.** — La ecuación binómica particular

$$x^n = 1$$

que define las así llamadas raíces de la unidad de grado n, es de especial interés. Puesto que en este caso $r = 1$ y $\theta = 0$, las n raíces de la unidad se obtienen de la fórmula:

$$\cos \frac{2\,k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\,k\pi}{n};$$

tomando en ella: $k = 0; 1; 2; \ldots ; n - 1$. Para $k = 0$ tenemos una raíz evidente: $x = 1$; y las otras $n - 1$ raíces, por la fórmula de De Moivre, son las potencias

$$\omega^k;\ k = 1; 2; \ldots ; n - 1,$$

de la raíz

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}.$$

Siendo:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1),$$

lo que se verifica multiplicando directamente; $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ son raíces de la ecuación

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0.$$

Para algunos valores particulares de n esta ecuación puede ser resuelta fácilmente en forma algebraica; por comparación de las soluciones algebraicas y trigonométricas en tales casos, pueden hallarse expresiones algebraicas para cos $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ y sen $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ como se ve en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. La raíz cúbica de la unidad

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$$

satisface la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación halladas algebraicamente son:

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Puesto que cos $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ es negativo y sen $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ es positivo, será:

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

por lo tanto:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\ ; \quad \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

como se sabe por trigonometría.

Ejemplo 2. La raíz quinta de la unidad

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$$

satisface la ecuación

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Esta ecuación pertenece a la clase de ecuaciones *recíprocas* del tipo

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

y toda ecuación de este tipo puede resolverse de la siguiente manera: Dividida por x^2, la ecuación propuesta toma la forma:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0.$$

Hacemos ahora:

$$x + \frac{1}{x} = y.$$

Entonces será:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

e y puede hallarse resolviendo la ecuación de segundo grado

$$y^2 + y - 1 = 0,$$

cuyas raíces son:

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad ; \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Queda por determinar x, resolviendo las dos ecuaciones:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \quad ; \quad x + \frac{1}{x} = y_2,$$

lo que es equivalente a:

$$x^2 - y_1 x + 1 = 0 \quad ; \quad x^2 - y_2 x + 1 = 0.$$

Las cuatro raíces halladas resolviendo estas ecuaciones son:

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i\,\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i\,\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Ahora bien, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos 72°$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{sen} 72°$ son ambos positivos, de modo que, necesariamente:

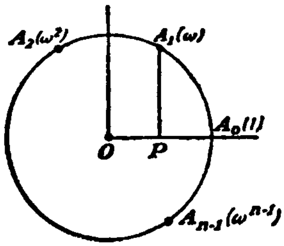
$$\omega = \cos 72° + i \operatorname{sen} 72° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

en consecuencia:

$$\cos 72° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad ; \quad \operatorname{sen} 72° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Las otras raíces, en el orden en que están escritas, son: ω^4; ω^2; ω^3.

La división de una circunferencia en partes iguales o la construcción de polígonos regulares inscriptos está vinculada íntimamente con las raíces de la unidad. De hecho, si $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ son vértices de un polígono regular de n lados inscripto en un círculo de radio 1 y se elige OA_0 como eje real, los ángulos que OA_1, OA_2, $OA_3, \ldots$ forman con él son: $\frac{2\pi}{n}$; $\frac{4\pi}{n}$; $\frac{6\pi}{n} \ldots$, y en consecuencia, los vértices A_0, A_1, $A_2, \ldots$ están representados por los números complejos



$$1;\ \omega;\ \omega^2;\ \ldots,$$

donde $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Para construir el polígono es suficiente trazar la abscisa $OP = \cos\frac{2\pi}{n}$ o la parte real de ω. La construcción con regla y compás será posible si la expresión algebraica de ω resulta compuesta solamente por raíces cuadradas. De esta manera, la construcción de polígonos regulares requiere la solución algebraica de la ecuación $x^n = 1$ y la investigación de las condiciones bajo las cuales pueden expresarse sus raíces por radicales cuadráticos. Esto constituye un importante capítulo del álgebra llamado ciclotomía. Para la construcción más conveniente de polígonos de 3, 4, 5, 6 y 10 lados, se remite al lector a los problemas siguientes.

Problemas

1. Demostrar que la raíz vigésimo cuarta de la unidad: $\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°$, satisface la ecuación

$$x^8 - x^4 + 1 = 0$$

y hallar la expresión de las raíces de esta ecuación en forma trigonométrica y algebraica. Nótese que:

$$x^{24} - 1 = (x^{12} - 1)(x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1).$$

2. Demostrar que

$$\varepsilon_1 = 2\cos\frac{2\pi}{7}; \quad \varepsilon_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7}; \quad \varepsilon_3 = 2\cos\frac{6\pi}{7},$$

son raíces de la ecuación cúbica $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

SUGESTIÓN: Las raíces séptimas de la unidad satisfacen la ecuación

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Divídase por x^3 y hágase $x + \dfrac{1}{x} = y$.

3. Demostrar que

$$\varepsilon_1 = 2\cos\frac{2\pi}{9}\;;\quad \varepsilon_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9}\;;\quad \varepsilon_3 = 2\cos\frac{8\pi}{9}$$

son raíces de la ecuación cúbica $y^3 - 3y + 1 = 0$.

SUGESTIÓN: Las raíces novenas de la unidad que no son raíces cúbicas de la unidad satisfacen la ecuación: $x^6 + x^3 + 1 = 0$.

4. Siendo

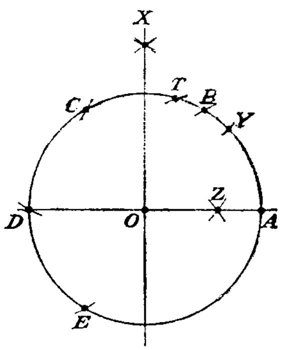
$$\eta = \cos 24° + i \operatorname{sen} 24°,$$

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

demostrar que $\eta = \varepsilon^2\omega^{-1}$ y expresar $\cos 24°$ y $\operatorname{sen} 24°$ en forma algebraica.

5. Para dividir una circunferencia en 3, 4, 6, 8 partes iguales puede usarse la siguiente construcción: Por brevedad, un círculo de centro C y radio R se designará $C\,(R)$. Los puntos B, C, D, E son intersecciones del círculo $O\,(OA)$ con los círculos $A\,(OA)$, $B\,(OA)$, $C\,(OA)$, $D\,(OA)$. El punto X es la intersección de los círculos $A\,(AC)$ y $D\,(AC)$. El punto Y se obtiene como intersección de $X\,(OA)$ y $O\,(OA)$. Demostrar que AC, OX, AB, AY son los lados de polígonos regulares de 3, 4, 6, 8 lados inscriptos en $O\,(OA)$.

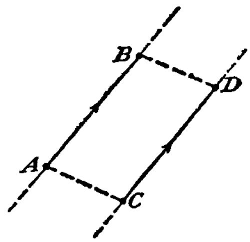


6. Conservando las notaciones del problema anterior, descríbanse arcos $C\,(OX)$ y $E\,(OX)$ que se interceptan en Z. Descríbase $Z\,(OA)$ que intercepta a $O\,(OA)$ en T. Demuéstrese que AT y OZ son, respectivamente, lados del pentágono y el decágono regulares inscriptos en $O\,(OA)$.

7. Idéese una construcción del polígono regular de 15 lados.

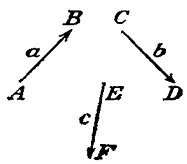
17. Significado geométrico de las operaciones con números complejos. — La representación geométrica de los números complejos explicada en el Párrafo 11 abre el camino para las aplicaciones de los números complejos a la geometría. Es evidente que una construcción geométrica resultará como una imagen de cierta operación realizada

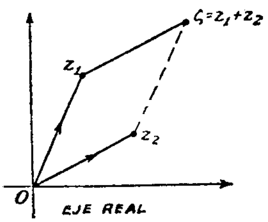
con números complejos. Aquí nos concretaremos sólo al examen de las construcciones que corresponden a la adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos, junto a unas pocas cuestiones adicionales que pueden ser útiles en la solución de los problemas siguientes. Los números complejos están representados por puntos o por vectores, todos con su origen en O. En lo que sigue será necesario considerar vectores con orígenes arbitrarios para explicar la noción de equivalencia o igualdad de vectores. Dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ con orígenes en A y C, respectivamente, se llaman equipolentes si se encuentran en la misma recta o en rectas paralelas y tienen el mismo sentido y la misma longitud. En la figura, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son vectores equipolentes. Uniendo los orígenes y los extremos de vectores equipolentes, en general se obtiene un paralelogramo. La suma de varios vectores, por ejemplo de los tres vectores:

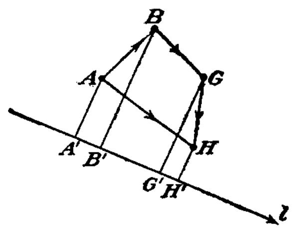


$$a = \overrightarrow{AB} \ ; \ b = \overrightarrow{CD} \ ; \ c = \overrightarrow{EF},$$

se efectúa de la siguiente manera: En el extremo B de a, colóquese el vector $\overrightarrow{BG}$ con el origen en B y equipolente con b; tómese G como origen y constrúyase el vector $\overrightarrow{GH}$ equipolente con c. Entonces, el vector $\overrightarrow{AH}$ —o uno equipolente— es, por definición, la suma de los vectores $a + b + c$. De la figura se desprende que la proyección de la suma de vectores sobre una semirrecta l es igual a la suma de las proyecciones de estos vectores; tomándose cada proyección positiva o negativamente según que la dirección del segmento correspondiente (tal como $A'B'$, $G'\,H'$, etc.) sea la misma que la de l o la opuesta. Será ahora fácil describir la construcción correspondiente a la suma de números complejos. Estando representados los números complejos z_1 y z_2 por los puntos z_1 y z_2, se suman de acuerdo a la regla recién explicada para la adición del vec-







tor $\overrightarrow{Oz_2}$ al $\overrightarrow{Oz_1}$; el vector resultante $\overrightarrow{O\zeta}$ será su suma, y el punto ζ representará el número complejo $z_1 + z_2$. De hecho, si

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad ; \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

las proyecciones de $\overrightarrow{Oz_1}$ y $\overrightarrow{Oz_2}$ sobre los ejes real e imaginario, serán respectivamente:

$$a_1; \; a_2 \; ; \; b_1; \; b_2;$$

por lo tanto, las proyecciones de $\overrightarrow{O\zeta}$ son:

$$a_1 + a_2 \quad \text{y} \quad b_1 + b_2$$

y en consecuencia:

$$\zeta = a_1 + a_2 + i\,(b_1 + b_2) = z_1 + z_2.$$

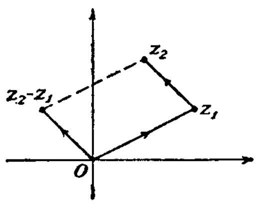
Nótese que la figura $Oz_1\,\zeta\,z_2$, en general es un paralelogramo, siempre que los puntos O, z_1, z_2 no estén alineados. En el triángulo $Oz_1\,\zeta$ el lado $O\zeta$ es menor que la suma de los otros dos, lo que conduce inmediatamente a la desigualdad

$$|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$

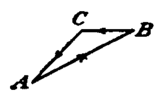
siempre que los puntos O, z_1, z_2 no estén alineados. La misma desigualdad vale aun cuando O, z_1, z_2 estén alineados, si z_1 y z_2 se encuentran en semirrectas opuestas con respecto a O; si se encuentran en la misma semirrecta, entonces:

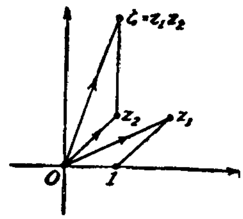
$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Ahora bien, si z_1 y z_2 se encuentran en la misma semirrecta que parte de O, los argumentos de los números complejos z_1 y z_2 son iguales y el cociente es un número real positivo; recíprocamente, en el caso en que los argumentos de z_1 y z_2 sean iguales, O, z_1, z_2 están alineados y z_1 y z_2 se encuentran en una misma semirrecta respecto de O. Así, por medio de la representación geométrica hemos demostrado nuevamente y de manera intuitiva la proposición establecida en el Párrafo 9. La construcción geométrica para la suma de dos números complejos conduce inmediatamente a la correspondiente construcción de la diferencia $z_2 - z_1$. Esta diferencia está representada por el cuarto vértice del paralelogramo, tres vértices consecutivos del cual son: O, z_1, z_2. Evidentemente, el vector que representa la diferencia $z_2 - z_1$ es equipolente con el vector $\overrightarrow{z_1 z_2}$.



La regla para la multiplicación de números complejos en forma trigonométrica nos proporciona una construcción simple para el producto de dos números complejos z_1 y z_2. Antes de explicar esta construcción es necesario explicar lo que se quiere significar por *sentido* al referirnos al triángulo ABC cuyos vértices se toman en el orden indicado. Yendo de A a B, de B a C y volviendo nuevamente de C a A, el interior del triángulo puede quedar situado ya a la izquierda, ya a la derecha; en el primer caso decimos que tiene sentido positivo; en el último, que tiene sentido negativo. Así, el triángulo ABC representado en la figura tiene sentido positivo; pero el mismo triángulo, si sus vértices se toman en el orden ACB, tendrá sentido negativo. Uniendo el punto z_1 con O y 1, se forma el triángulo $O1z_1$. Tomando ahora Oz_2 como lado correspondiente a $O1$, construímos otro triángulo $Oz_2\,\zeta$ semejante a $O1z$, es decir, con el mismo sentido y ángulos iguales en los vértices correspondientes. Si ϕ_1 y ϕ_2 son los ángulos entre el eje real y los vectores $\overrightarrow{Oz_1}$ y $\overrightarrow{Oz_2}$, por construcción el ángulo entre el eje real y $\overrightarrow{O\zeta}$ es $\phi_1 + \phi_2$. El argumento de ζ es: $\phi_1 + \phi_2$. Además, designando con ρ, r_1, r_2 las distancias de O a ζ, z_1, z_2 respectivamente, se desprende de la semejanza de los triángulos $O1z_1$ y $Oz_2\,\zeta$ que:

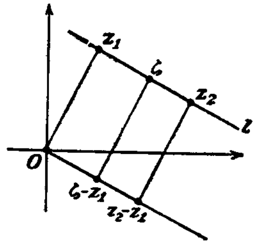




$$\frac{\rho}{r_1} = \frac{r_2}{1};$$

en consecuencia $\rho = r_1 r_2$ es el módulo de ζ. Por lo tanto, ζ representa al producto $z_1 z_2$. Puede efectuarse una construcción similar para representar el cociente z_1/z_2.

Sean los números complejos z_1, z_2, ζ, representados por tres puntos alineados. En este caso, como puede verse en la figura, los puntos O, $\zeta - z_1$, $z_2 - z_1$ están también alineados, y por lo tanto los argumentos de $\zeta - z_1$ y $z_2 - z_1$ o son iguales o difieren en π. En consecuencia,



$$\zeta - z_1 = \lambda\,(z_2 - z_1)\,,$$

o sea

$$\zeta = (1 - \lambda)\,z_1 + \lambda\,z_2,$$

donde λ es un número real. Es evidente que la recíproca también es verdad; es decir, si λ es real, los puntos ζ, z_1, z_2 están alineados. El nú-

mero λ en la fórmula precedente tiene un significado simple. Designando por r la distancia entre z_1 y z_2 y por ρ el segmento $\overrightarrow{z_1 \zeta}$, tomado positiva o negativamente según que la dirección de $\overrightarrow{z_1 \zeta}$ coincida con la dirección $\overrightarrow{z_1 z_2}$ o sea opuesta a ella, evidentemente λ es igual a la razón r/ρ. En particular, si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, el punto ζ es el punto medio del segmento $z_1 z_2$, y está representado por el número complejo

$$\zeta = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

El vector correspondiente a $i\,(z_2 - z_1)$ es perpendicular a la recta l que une z_1 y z_2; en consecuencia, es fácil ver que los números complejos

$$\zeta = a + i\,\lambda\,(z_2 - z_1)$$

donde λ es real, representan puntos de la recta trazada por un punto arbitrario a y perpendicular a l.

Problemas

1. Construir un triángulo XYZ, dados los puntos medios P, Q, R de los lados XY, YZ, ZX.

Sugestión: Sean x, y, z números complejos que representen los vértices desconocidos X, Y, Z, y p, q, r números complejos que representen P, Q, R. Entonces: $x + y = 2\,p$; $y + z = 2\,q$; $z + x = 2\,r$. Por simplicidad de construcción el origen puede colocarse por ejemplo, en P.

2. Construir un cuadrilátero $XYZT$ dados los puntos medios P, Q, R, S de los lados XY, YZ, ZT, TX. El problema sólo es posible si P, Q, R, S satisfacen una cierta condición. ¿Cuál es el significado geométrico de esta condición? Satisfecha esta condición, el problema es indeterminado.

3. Dados los puntos medios de cinco de los lados de un exágono, ¿cómo puede ubicarse el sexto para que existan exágonos tales que los puntos medios de sus lados sean los dados?

4. Dados los puntos P, Q, R tales que dividan los lados del triángulo XYZ en segmentos cuyas razones sean:

$$\frac{XP}{PY} = \frac{1}{1} \quad ; \quad \frac{YQ}{QZ} = \frac{2}{1} \quad ; \quad \frac{ZR}{RX} = \frac{1}{2}$$

construir el triángulo. Discutir la condición para la existencia de un verdadero triángulo.

5. Los números complejos $z = a + (b - a)\,t$, donde a y b son complejos dados y t un número real variable, representan puntos de la recta ab. Demostrar que las rectas

$$z = a + (b - a)\,t \quad ; \quad z = c + (d - c)\,t'$$

son paralelas si

$$I\left(\frac{b-a}{d-c}\right)=0,$$

y perpendiculares si

$$R\left(\frac{b-a}{d-c}\right)=0.$$

6. ¿Cómo puede hallarse el punto de intersección de las rectas del problema 5 si no son paralelas? El valor de t para el punto de intersección está dado por:

$$t\,I\left(\frac{b-a}{d-c}\right)+I\left(\frac{a-c}{d-c}\right)=0.$$

7. Si z_1, z_2, z_3 representan los vértices de un triángulo, demostrar que las medianas se cortan en un punto y hallar el número complejo correspondiente a este punto.

8. Los números complejos z_1, z_2, z_3 representan los vértices de un triángulo $z_1z_2z_3$ de sentido positivo. Si a, b, c son las longitudes de los lados z_1z_2, z_2z_3, z_1z_3 y A, B, C los ángulos opuestos, demostrar que

$$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{a}{b}(\cos C+i\operatorname{sen} C)\;;\quad \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{c}{b}(\cos A-i\operatorname{sen} A).$$

Además, utilizando la identidad

$$(z_1-z_2)+(z_2-z_3)+(z_3-z_1)=0$$

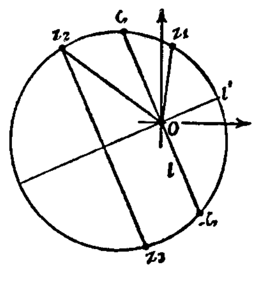
demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

y

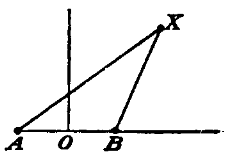
$$b=a\cos C+c\cos A;\ \text{etc.}$$

*** 9.** La media geométrica $\sqrt{z_1 z_2}$ de los números complejos z_1 y z_2 puede construirse de la siguiente manera: Dibújese la bisectriz l del ángulo comprendido entre $\overrightarrow{Oz_1}$ y $\overrightarrow{Oz_2}$ y por O la recta l' perpendicular a l. Tómese z_3 simétricamente a z_2 con respecto a l', y dibújese un círculo que pase por los puntos z_1, z_2, z_3 y corte a l en los puntos ζ y $-\zeta$. Estos dos puntos representan dos valores de la media geométrica.



*** 10.** Con base $AB = 2a$ construir un triángulo ABX conociendo el producto de los lados $AX.BX = m^2$ y la diferencia de los ángulos $\sphericalangle ABX - \sphericalangle BAX = \delta$.

Sugestión: Tómese la base AB como eje real, el origen O en su punto medio, y sea X el número complejo que representa el vértice incógnito X. Las condiciones del problema nos llevan a la ecuación



$$X^2=a^2-m^2(\cos\delta-i\operatorname{sen}\delta),$$

o bien

$$X^2=\left[a+m\left(\cos\frac{\delta}{2}-i\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)\right]\left[a-m\left(\cos\frac{\delta}{2}-i\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\right)\right].$$

La construcción de X surge del Problema 9.

CAPITULO II

POLINOMIOS DE UNA VARIABLE

1. **Las funciones racionales enteras o polinomios.** — Una expresión de la forma

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

en la cual $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números dados (reales o imaginarios) y la x es la variable, se llama *función racional entera de* x o *polinomio en* x. Las constantes $a_0, a_1, \dots, a_n$ se llaman *coeficientes*, y los monomios separados:

$$a_0 x^n \ ; \ a_1 x^{n-1} \ ; \ \dots \ ; \ a_n$$

se denominan *términos* del polinomio. Si $a_0 \neq 0$, el polinomio es de grado n y $a_0 x^n$ es su término *principal*. Los términos con coeficientes iguales a cero usualmente se omiten; mientras que, por otra parte, antes del término principal pueden agregarse tantos términos con coeficientes cero como se desee y todos los polinomios así obtenidos son considerados idénticos. Aun cuando estrictamente hablando, un polinomio debe contener la variable x, sin embargo, por una cuestión de conveniencia, es costumbre considerar a las constantes distintas de cero como polinomios de grado cero. Un polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero, se llama *idénticamente nulo* y es reemplazado por cero. Al polinomio idénticamente nulo no se le atribuye grado. Dos polinomios se consideran *iguales* si son idénticos término a término; es decir, la igualdad:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

implica que:

$$a_0 = b_0 \ ; \ a_1 = b_1 \ ; \dots ; a_n = b_n .$$

A menudo es conveniente introducir en la notación de polinomios el uso de signos de función: $f(x)$; $g(x)$; $\phi(x)$; etc.; y aún omitir la x, escribiendo simplemente: f, g, etc., si no puede darse lugar a dudas procediendo así. El resultado de la sustitución de un número a en lugar

de x, en un polinomio $f(x)$, es un número llamado valor numérico de dicho polinomio para $x = a$ y se indica con $f(a)$. Así, para los polinomios:

$$f(x) = 3x^3 - x + 2, \qquad g(x) = 4x^4 - x^3 + 2x - 1,$$

$$h(x) = \sqrt{2}x^2 - (3 + \sqrt{2})\,x + 4,$$

tenemos

$$f(-1) = 0 \quad , \quad g(i) = 3 + 3i \quad , \quad h(1) = 1.$$

2. **Multiplicación de polinomios.** — La adición, sustracción y multiplicación de polinomios se conoce suficientemente bien de los cursos elementales de álgebra. Solamente puede agregarse una observación de naturaleza práctica con respecto a la multiplicación. Si deseamos por ejemplo, multiplicar los polinomios:

$$x^2 - x + 1 \quad \text{y} \quad x^2 + x + 1$$

la disposición usual de los polinomios es la siguiente:

$$\begin{array}{lllll}
\multicolumn{5}{l}{(x^2 - x + 1) \times (x^2 + x + 1)} \\
\hline
x^4 & -\,x^3 & +\,x^2 & & \\
 & x^3 & -\,x^2 & +\,x & \\
 & & x^2 & -\,x & +\,1 \\
\hline
x^4 & & +\,x^2 & & +\,1
\end{array}$$

Este procedimiento, sobre todo cuando los polinomios a multiplicar tienen muchos términos, supone un trabajo inútil bastante considerable al escribir las potencias de x. Esto puede evitarse usando el método de los *coeficientes separados*. En este método escribimos solamente las sucesiones de los coeficientes de los polinomios que deseamos multiplicar, comenzando con los principales, y sin omitir los coeficientes nulos. Entonces, los coeficientes de uno de los polinomios se multiplican en orden por el primer, segundo, tercer, etc. coeficientes del segundo polinomio, y los renglones de números se disponen uno bajo el otro de tal manera que cada renglón esté desplazado un lugar a la derecha con respecto al precedente. Sumando los números que se encuentran en una misma columna obtenemos los coeficientes ordenados del producto, y finalmente restituímos las potencias de x faltántes. Por ejemplo, la operación realizada más arriba puede ordenarse como sigue:

$$\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{l}{1 \;\; -1 \;\; 1 \;\times\; 1 \;\; 1 \;\; 1} \\
\hline
1 & -1 & 1 & & \\
 & 1 & -1 & 1 & \\
 & & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

de manera que el producto resulta:

$$x^4 + 0\,x^3 + x^2 + 0\,x + 1 = x^4 + x^2 + 1.$$

Como otro ejemplo, multipliquemos:

$$x^5 + x^3 - 2\,x^2 + 3 \quad \text{por} \quad 2\,x^4 - 3\,x^3 + 4\,x^2 - 1.$$

En este ejemplo el cálculo se dispone como sigue:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
\multicolumn{10}{l}{1\quad 0\quad 1\quad -2\quad 0\quad 3\qquad \times\quad 2\quad -3\quad 4\quad 0\quad -1} \\ \hline
2 & 0 & 2 & -4 & 0 & 6 & & & & \\
 & -3 & 0 & -3 & 6 & 0 & -9 & & & \\
 & & 4 & 0 & 4 & -8 & 0 & 12 & & \\
 & & & & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ \hline
2 & -3 & 6 & -7 & 9 & -2 & -10 & 14 & 0 & -3
\end{array}$$

de manera que el producto es:

$$2\,x^9 - 3\,x^8 + 6\,x^7 - 7\,x^6 + 9\,x^5 - 2\,x^4 - 10\,x^3 + 14\,x^2 - 3.$$

Uno de los renglones estaba compuesto de ceros, por lo que es obvio que podía omitirse.

Debe agregarse una advertencia más de importancia teórica: Si dos polinomios no idénticamente nulos $f(x)$ y $g(x)$ tienen términos principales $a_0\,x^n$ y $b_0\,x^m$, el término principal del producto será

$$a_0\,b_0\,x^{n+m}$$

y el coeficiente difiere de cero; por lo tanto $f(x)\,.\,g(x)$ es un polinomio no idénticamente nulo. En consecuencia, si

$$f(x)\,g(x) = 0$$

uno de los factores debe ser un polinomio idénticamente nulo.

Problemas

Multiplíquense por el método de los coeficientes separados:

1. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ por $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

2. $2\,x^4 - 3\,x^3 + x - 1$ por $x^3 + 3\,x^2 - 1$.

3. $x^4 + 4\,x^3 - 5\,x^2 - 2$ por $x^4 - 4\,x^3 - 5\,x^2 - 2$.

4. $x^5 - 3\,x^4 + x^3 - x + 1$ por $3\,x^3 + 7\,x^2 - x + 1$.

3. **División de polinomios.** — La división de polinomios requiere una explicación más detallada. Sean:

$$f(x) = a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \ldots + a_n$$
$$g(x) = b_0\,x^m + b_1\,x^{m-1} + \ldots + b_n$$

dos polinomios de grados n y m respectivamente, por lo que $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$, y supóngase que $n \geq m$. Eligiendo en forma apropiada una constante c_0 se puede obtener un polinomio:

$$f(x) - c_0 x^{n-m} g(x) = f_1(x)$$

que si no es idénticamente nulo, será de grado $n_1 < n$; para ésto es suficiente tomar

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}.$$

Mientras sea $n_1 \geqq m$ puede encontrarse una constante c_1 tal que:

$$f_1(x) - c_1 x^{n_1-m} g(x) = f_2(x)$$

que si no es idénticamente nulo, será de grado $n_2 < n_1$. Si $n_2 \geqq m$, puede repetirse el mismo proceso. Ahora, los grados de los « restos parciales » $f_1(x)$; $f_2(x)$; ... forman una sucesión decreciente, de manera que habrá algún primer resto parcial $f_{k+1}(x)$ que, o bien es idénticamente nulo, o es de grado $n_{k+1} < m$. Reemplazando $f_1(x)$; $f_2(x)$; ... ; $f_k(x)$ por su valor, tomado de las identidades:

$$\begin{aligned} f(x) - c_0 x^{n-m} g(x) &= f_1(x) \\ f_1(x) - c_1 x^{n_1-m} g(x) &= f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_k(x) - c_k x^{n_k-m} g(x) &= f_{k+1}(x) \end{aligned}$$

y poniendo por brevedad:

$$c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n_1-m} + \dots + c_k x^{n_k-m} = q(x) \;\; ; \; f_{k+1}(x) = r(x)$$

obtenemos la identidad:

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x) ,$$

en la cual $r(x)$ es de grado menor que m o es idénticamente nulo. Los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ se llaman cociente y resto de la división de $f(x)$ por $g(x)$ y se encuentran por el proceso antes descripto, que es esencialmente igual al que se enseña en los cursos elementales de álgebra.

Igual que en la multiplicación, en la práctica es ventajoso evitar el escribir las potencias de x usando el método de los « coeficientes separados ». Por ejemplo, dividamos

$$x^8 + x^7 + 3x^4 - 1 \quad \text{por} \quad x^4 - 3x^3 + 4x + 1 .$$

Al escribir los coeficientes separados no deben olvidarse los coefi-

cientes nulos de los términos faltantes. La operación se dispone como sigue:

Dividendo									
1	1	0	0	3	0	0	0	— 1	
1	—3	0	4	1					
	4	0	— 4	2	0				
	4	—12	0	16	4				
		12	— 4	—14	— 4	0			
		12	—36	0	48	12	0		
			32	—14	— 52	— 12	0		
			32	—96	0	128	32	— 1	
				82	— 52	—140	— 31	— 1	
				82	—246	0	328	82	
					192	—140	—360	—83	Resto

Divisor				
1	—3	0	4	1
1	4	12	32	82
				Cociente

Por lo tanto el cociente y el resto son:

$$x^4 + 4\,x^3 + \;\; 12\,x^2 + 32\,x + 82, \text{ cociente}$$

$$194\,x^3 - 140\,x^2 - 360\,x \;- 83, \text{ resto}$$

e idénticamente:

$$x^8 + x^7 + 3\,x^4 - 1 = (x^4 - 3\,x^3 + 4\,x + 1)\,(x^4 + 4\,x^3 +$$
$$+ 12\,x^2 + 32\,x + 82) + 194\,x^3 - 140\,x^2 - 360\,x \;- 83$$

Si el resto de la división de $f(x)$ por $g(x)$ es cero, es decir, si

$$f(x) = g(x)\,q(x)$$

donde $q(x)$ es un polinomio, se dice que $f(x)$ es divisible por $g(x)$ o que $g(x)$ es un divisor de $f(x)$. Lógicamente, ningún polinomio que no sea idénticamente nulo puede dividirse por otro de grado mayor. De esto puede inferirse que en una identidad de la forma:

$$f(x) = g(x)\,q_1(x) + r_1(x)$$

donde $q_1(x)$ y $r_1(x)$ son polinomios y $r_1(x)$ es, o bien cero, o tiene grado menor que $g(x)$, $q_1(x)$ y $r_1(x)$ coinciden con el cociente y el resto obtenidos por división. En efecto, si

$$f(x) = g(x)\,q_1(x) + r_1(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$$

entonces

$$g(x)\,[q_1(x) \;- q(x)] = r(x) - r_1(x)$$

que demuestra que $r(x) - r_1(x)$ es divisible por $g(x)$. Es imposible que $r(x) - r_1(x)$ no sea idénticamente nulo, pues en ese caso su grado

sería menor que el de $g(x)$ y no podría ser divisible por $g(x)$. Por lo tanto $r_1(x) = r(x)$ y también $q_1(x) = q(x)$.

La simple advertencia siguiente será necesaria más adelante: Si dos polinomios f y f_1 son divisibles por g, entonces para polinomios l y l_1, el polinomio

$$lf + l_1 f_1$$

será divisible por g. En efecto, por hipótesis

$$f = gq \quad ; \; f_1 = gq_1 \, ,$$

donde q y q_1 son polinomios; por lo tanto:

$$lf + l_1 f_1 = g(lq + l_1 q_1)$$

es divsiible por g.

Problemas

Divídase por el método de los coeficiente separados

1. $x^7 + 3x^6 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ por $x^4 - x + 1$.
2. $2x^7 - 3x^6 + x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ por $2x^3 - 3x^2 + x - 1$.
3. $x^5 - 3x^2 + 6x - 1$ por $x^2 + x + 1$.
4. $x^{10} + x^5 + 1$ por $x^2 + x + 1$.
5. $(x + 1)^7 - x^7 - 1$ por $(x^2 + x + 1)^2$.

4. **El teorema del resto.** — El resto de la división de un polinomio por un binomio $x - c$, donde c es un número arbitrario, puede encontrarse sin realizar la división, por medio del siguiente teorema, que es importante a pesar de su simplicidad:

Teorema del resto. — El resto obtenido en la división de $f(x)$ por $(x - c)$ es igual al valor numérico del polinomio $f(x)$ para $x = c$, es decir, a $f(c)$.

Demostración: Por ser el divisor de primer grado, el resto será una constante r. Llamando al cociente $q(x)$, tenemos la identidad:

$$f(x) = (x - c)\, q(x) + r \, .$$

Al sustituir x por c en esta identidad, debemos obtener números iguales. Ahora, por ser r una constante, no está afectada por esta sustitución y el valor del segundo miembro para $x = c$ será

$$(c - c)\, q(c) + r = r$$

mientras que el primer miembro es $f(c)$; por lo tanto:

$$r = f(c)$$

lo que significa que, idénticamente en x, es:

$$f(x) = (x - c)\, q(x) + f(c)$$

Se deduce de este teorema que $f(x)$ es divisible por $(x - c)$ sólo si $f(c) = 0$.

Ejemplo 1. Demostrar que $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ es divisible por $x + 3$. En este caso $c = -3$, y por lo tanto tenemos que calcular

$$f(-3) = -27 + 9 + 15 + 3 = 0$$

por lo tanto $f(x)$ es divisible por $x + 3$.

Ejemplo 2. Demostrar que $x^n - c^n$ es divisible por $x - c$. Esto es cierto puesto que $c^n - c^n = 0$; el cociente, hallado por división ordinaria, es:

$$x^{n-1} + cx^{n-2} + c^2 x^{n-3} + \dots + c^{n-1}.$$

Ejemplo 3. ¿En qué condiciones $x^n - c^n$ es divisible por $x + c$? En este caso debe sustituirse $x = -c$ en $x^n + c^n$; el resultado de la sustitución es:

$$(-c)^n + c^n = c^n + c^n = 2\,c^n \text{ si } n \text{ es par,}$$

$$(-c)^n + c^n = -c^n + c^n = 0 \text{ si } n \text{ es impar.}$$

Por lo tanto $x^n + c^n$ es divisible por $x + c$ (para $c \neq 0$) sólo si n es impar, y para un n par el resto después de dividir es $2\,c^n$.

Problemas

Sin efectuar la división demostrar que:

1. $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ es divisible por $x + 2$.

2. $x^5 - 3x^4 + x^2 - 2x - 3$ es divisible por $x - 3$.

3. Si a y b son distintos y $f(x)$ es, separadamente, divisible por $x - a$ y $x - b$ demostrar que es divisible por $(x - a)(x - b)$.

Sin efectuar la división demostrar que:

4. $2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$ es divisible por $x^2 - 5x + 6$.

5. $2x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2$ es divisible por $x^2 + 1$.

6. $x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x + 1$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

7. Demostrar que $(x + 1)^n - x^n - 1$ es divisible por $x^2 + x + 1$ sólo si n es un número impar no divisible por 3.

5. **Regla de Ruffini.** — El cociente de la división por (x — c) puede determinarse por un procedimiento muy conveniente, conocido como *Regla de Ruffini*. En la identidad del Párrafo 4

$$f(x) = (x - c)\, q(x) + r$$

sustituyamos el cociente

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

donde b_0; b_1; b_2; ... ; b_{n-1} son coeficientes que se determinarán.

Efectuando la multiplicación, tenemos:

$$(x - c)\, q(x) = b_0 x^n + (b_1 - cb_0)\, x^{n-1} + \\ + (b_2 - cb_1)\, x^{n-2} + \dots + (b_{n-1} - cb_{n-2})\, x - cb_{n-}$$

y

$$(x - c)\, q(x) + r = b_0 x^n + (b_1 - cb_0)\, x^{n-1} + \\ + (b_2 - cb_1)\, x^{n-2} + \dots + (b_{n-1} - cb_{n-2})\, x + r - cb_{n-1}\,.$$

Como este polinomio debe ser idéntico a

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

para determinar b_0; b_1; b_2; ... ; b_{n-1} y r igualamos los coeficientes de las mismas potencias de x, obteniendo el grupo de ecuaciones:

$$b_0 = a_0 \ ; \ b_1 - cb_0 = a_1 \ ; \ b_2 - cb_1 = a_2 \ ; \dots ; \\ b_{n-1} - cb_{n-2} = a_{n-1} \ ; \ r - cb_{n-1} = a_n$$

de donde se desprende que $b_0, b_1, \dots, b_n$ y r se calculan ordenadamente de la siguiente manera:

$$b_0 = a_0 \ ; \ b_1 = a_1 + cb_0 \ ; \ b_2 = a_2 + cb_1 \ ; \dots ; \\ b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2} \ ; \ r = a_n + cb_{n-1}\,.$$

El cálculo es de naturaleza recurrente, y en la práctica puede ordenarse más convenientemente así:

$$\begin{array}{llllll} c) & a_0 & a_1 & a_2 \dots & a_{n-1} & a_n \\ & & cb_0 & cb_1 \dots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & \underbrace{a_0 = b_0 \quad b_1 \quad b_2 \dots b_{n-1}}_{\text{coeficientes del cociente}} & & & & r \quad \text{resto} \end{array}$$

Todos los coeficientes de $f(x)$ están escritos sin omisiones en el primer renglón, comenzando con el a_0. El tercer renglón comienza con

$a_0 = b_0$ que se multiplica por c, el producto se escribe en el segundo renglón y se suma a a_1; la suma b_1 se escribe en el tercer renglón. Nuevamente, b_1 se multiplica por c, el producto se escribe en la segunda línea y se suma a a_2; la suma se sitúa en el tercer renglón, y el mismo procedimiento se repite hasta que, en la última columna, se encuentra el resto r.

Las expresiones independientes para $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, r$ que se obtienen por sustituciones sucesivas son:

$$b_0 = a_0 \; ; \; b_1 = a_0 c + a_1 \; ; \; b_2 = a_0 c^2 + a_1 c + a_2 \; ; \ldots ;$$
$$b_{n-1} = a_0 c^{n-1} + a_1 c^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

y

$$r = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + a_2 c^{n-2} + \ldots + a_n = f(c)$$

que es una segunda comprobación del teorema del resto.

Considerando la sucesión de polinomios:

$$f_0 = a_0 \; ; \; f_1 = xf_0 + a_1 \; ; \; f_2 = xf_1 + a_2 \; ; \ldots ; \; f_n(x) = xf_{n-1}(x) + a_n$$

es evidente que:

$$f_i(x) = a_0 x^i + a_1 x^{i-1} + \ldots + a_i .$$

Por lo tanto

$$b_i = f_i(c) \quad i = 0, 1, 2, \ldots, i - 1 ,$$

y

$$f_i(x) = (x - c)\,[f_0(c)\, x^{i-1} + f_1(c)\, x^{i-2} + \ldots + f_{i-1}(c)] + f_i(c) .$$

El proceso precedentemente descripto para la obtención del cociente y el resto cuando se divide $f(x)$ por $(x - c)$ se conoce como *Regla de Ruffini*. Siendo el resto $f(c)$, la regla de Ruffini nos provee un medio conveniente para calcular el valor numérico de un polinomio para un valor dado de la variable.

Ejemplo 1. Encontrar el cociente y el resto de la división de

$$3x^6 - 7x^5 + 5x^4 - x^2 - 6x - 8 \text{ por } x + 2 .$$

Los cálculos necesarios se disponen como sigue:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2) & 3 & -7 & 5 & 0 & 1 & -6 & -8 \\
 & & -6 & 26 & -62 & 124 & -246 & 504 \\
\hline
 & 3 & -13 & 31 & -62 & 123 & -252 & 496
\end{array}$$

Luego el cociente es:

$$3x^5 - 13x^4 + 31x^3 - 62x^2 + 123x - 252$$

y el resto

$$r = 496\,.$$

Ejemplo 2. Dividir

$$5\,x^5 - 7\,x^3 + 6\,x^2 - 2\,x + 4 \text{ por } x - 1\,.$$

En este caso el proceso por la regla de Ruffini se reduce a sumas y puede disponerse en dos renglones, como se indica:

1)	5	0	—7	6	—2	4
	5	0	—2	4	2	6

de manera que el cociente es:

$$5\,x^4 + 5\,x^3 - 2\,x^2 + 4\,x + 2\,.$$

y el resto

$$r = 6\,.$$

Una simplificación similar ocurre cuando $c = -1$, en cuyo caso el proceso consiste únicamente en restas.

Problemas

Mediante la regla de Ruffini determínese el cociente y el resto de dividir:

1. $2\,x^4 - 6\,x^3 + 7\,x^2 - 5\,x + 1$ por $x + 2$.

2. $-x^4 + 7\,x^3 - 4\,x^2$ por $x - 3$.

3. $6\,x^3 - 10\,x^2 + 5\,x + 3$ por $x - 1{,}2$.

4. $10\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x - 1$ por $2\,x - 3$.

5. $x^4 + x^3 - x^2 + 1$ por $3\,x + 2$.

6. $(n - 1)\,x^n - nx^{n-1} + 1$ por $(x - 1)^2$.

7. Calcular $f\,(0{,}75)$, siendo $f\,(x) = -3\,x^3 + 6\,x^2 - x + 1$.

8. Calcular $f\,(-0{,}3)$, siendo $f\,(x) = -2\,x^4 + 6\,x^3 - x^2 + 2$.

6. **Regla de Horner.** — Dado que según el desarrollo de Newton, toda potencia

$$x^m = [c + (x - c)]^m = c^m + mc^{m-1}\,(x - c) + \\ + \frac{m\,(n-1)}{1.2}\,c^{m-2}\,(x - c)^2 + \ldots$$

puede expresarse en potencias de $x - c$, siendo c un número arbitrario, cualquier polinomio puede desarrollarse en forma similar. Sea

$$f\,(x) = A_0 + A_1\,(x - c) + A_2\,(x - c)^2 + \ldots + A_n\,(x - c)^n\,.$$

Los coeficientes de este desarrollo pueden determinarse en forma muy conveniente por aplicación repetida de la regla de Ruffini. En efecto, escribiendo

$$f\,(x) = A_0 + (x-c)\,f_1\,(x) \quad ; \; f_1\,(x) = A_1 + A_2\,(x-c) + \ldots + A_n(x-c)^{n-1}$$
$$f_1\,(x) = A_1 + (x-c)\,f_2\,(x) \quad ; \; f_2\,(x) = A_2 + \ldots + A_n\,(x-c)^{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

es evidente que A_0 se obtiene como resto de la división de $f\,(x)$ por $(x-c)$; A_1 como resto de la división del segundo coeficiente $f_2\,(x)$ por $x-c$, etc. La disposición de este procedimiento conocido como Regla de Horner se entiende mejor mediante ejemplos.

Ejemplo 1. Desarróllese según las potencias de x — 1:

$$f\,(x) = 4\,x^5 - 6\,x^4 + 3\,x^3 + x^2 - x - 1$$

En este caso la Regla de Horner se simplifica, reduciéndose a sumas

$$\begin{array}{lrrrrrr}
1) & 4 & -6 & 3 & 1 & -1 & -1 \\
 & 4 & -2 & 1 & 2 & 1 & \underline{0} \\
 & 4 & 2 & 3 & 5 & \underline{6} & \\
 & 4 & 6 & 9 & \underline{14} & & \\
 & 4 & 10 & \underline{19} & & & \\
 & 4 & \underline{14} & & & & \\
 & \underline{4} & & & & &
\end{array}$$

Los números subrayados, leídos de derecha a izquierda, representan los coeficientes A_0, A_1, A_2, . . ., A_n. Luego:

$$f\,(x) = 0 + 6\,(x-1) + 14\,(x-1)^2 + 19\,(x-1)^3 + 14\,(x-1)^4 + 4\,(x-1)^5.$$

Ejemplo 2. Desarróllese

$$f\,(x) = x^4 - 6\,x^2 + 1$$

en potencias de $x + 2$. El esquema de cálculo de la Regla de Horner es, en este caso:

$$\begin{array}{rrrrrr}
-2) & 1 & 0 & -6 & 0 & 1 \\
 & & -2 & 4 & 4 & -8 \\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & 4 & \underline{-7} \\
 & & -2 & 8 & -12 & \\
\cline{2-5}
 & 1 & -4 & 6 & \underline{-8} & \\
 & & -2 & 12 & & \\
\cline{2-4}
 & 1 & -6 & \underline{18} & & \\
 & & -2 & & & \\
\cline{2-3}
 & 1 & \underline{-8} & & & \\
 & 1 & & & &
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$x^4 - 6x^2 + 1 = -7 - 8(x+2) + 18(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$$

es el desarrollo pedido.

Problemas

Desarróllese:

1. $x^5 - 2$ en potencias de $x - 1$.
2. $x^5 - 6x^3 + x^2 - 1$ en potencias de $x + 1$.
3. $-4x^6 + 2x^5 - x + 1$ en potencias de $x + 2$.
4. $3x^4 + 6x^3 + x^2 - 1$ en potencias de $x - 0{,}3$.

7. **Fórmula de Taylor.** — Los coeficientes del desarrollo de un polinomio en potencias de $x - c$, dependen de una manera simple, de los valores numéricos de este polinomio y de sus derivadas en $x = c$. Mientras la noción de derivada de una función, en general, está íntimamente ligada a la idea de límite y por lo tanto, pertenece con más propiedad al cálculo diferencial, en el caso especial de los polinomios, las derivadas pueden definirse algebraicamente sin referencia alguna a límites. La derivada $f'(x)$ de un polinomio $f(x)$ puede definirse como el coeficiente de la primera potencia de h en el desarrollo de $f(x+h)$ en potencias crecientes de una variable auxiliar h. De esta definición y del desarrollo del binomio:

$$(x - c + h)^n = (x - c)^n + n(x - c)^{n-1}h + \dots$$

se deduce inmediatamente que la derivada de $(x - c)^n$ es $n(x - c)^{n-1}$ y, en particular, que nx^{n-1} es la derivada de x^n. Aún más, es evidente que multiplicando un polinomio por una constante, su derivada queda multiplicada por esa constante y que la derivada de la suma de polinomios es igual a la suma de sus derivadas. De esto es fácil sacar la conclusión de que la derivada de

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

es

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}.$$

Puesto que $f'(x)$ es un polinomio, podemos considerar su derivada, que se llama segunda derivada $f''(x)$, de $f(x)$. En forma similar, la derivada de la segunda derivada es la derivada tercera, $f'''(x)$, de $f(x)$, etcétera.

Ahora, tómese el desarrollo

$$f(x) = A_0 + A_1(x - c) + A_2(x - c)^2 + \dots + A_n(x - c)^n$$

y fórmense las sucesivas derivadas de ambos miembros:

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-c) + 3A_3(x-c)^2 + \dots + nA_n(x-c)^{n-1}$$
$$f''(x) = 2A_2 + 3.2.A_3(x-c) + \dots + n(n-1)A_n(x-c)^{n-2}$$
$$f'''(x) = 3.2.A_3 + 4.3.2.A_4(x-c) + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Tomando aquí $x = c$, encontramos

$$A_0 = f(c) \; ; \; A_1 = f'(c) \; ; \; A_2 = \frac{f''(c)}{1.2} \; ; \; A_3 = \frac{f'''(c)}{1.2.3} \; ;$$

y, en general:

$$A_i = \frac{f^{(i)}(c)}{1.2.3 \dots i} \cdot$$

Luego, el desarrollo de $f(x)$ en potencias de $(x-c)$ toma la forma

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1}(x-c) + \frac{f''(c)}{1.2}(x-c)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{1.2.3\dots n}(x-c)^n$$

que se conoce con el nombre de fórmula de Taylor. La regla de Horner, que sirve para calcular los coeficientes de este desarrollo, constituye un método conveniente para calcular los valores numéricos de un polinomio y sus derivadas para un dado valor de su variable.

Problemas

Calcular el valor numérico de los siguientes polinomios y de sus derivadas para el valor de x indicado:

1. $-x^4 + 6x^3 + x - 1$ para $x = 1$.

2. $2x^5 - 7x^3 - 10x^2 + 2x - 6$ para $x = -1$.

3. $4x^3 - 7x^2 + 5x + 3$ para $x = -2$.

4. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ para $x = -\frac{1}{2}\cdot$

8. **Máximo común divisor de dos polinomios.** — Dos polinomios pueden ser divisibles por un mismo polinomio, que se llama entonces común divisor. Por ejemplo, los polinomios:

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = (x+1)(x+2)(x^2+x-1)$$
$$x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)(x^4 - x^3 + x^2 + 1)$$

tienen los divisores comunes

$$x + 1 \ ; \ x + 2 \ ; \ (x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2 .$$

De todos los divisores comunes de dos polinomios, se asigna especial interés al divisor común de grado máximo. Esta expresión se denomina *máximo común divisor.* Veremos en seguida que el máximo común divisor es esencialmente único, y que puede encontrarse por una serie de operaciones regulares. Sean dos polinomios dados f y f_1. Dividiendo f por f_1, sea q_2 el coeficiente y f_2 el resto tal que

$$f = f_1 q_1 + f_2 .$$

Si f_2 no es un polinomio idénticamente nulo, podremos continuar dividiendo f_1 por f_2, obteniendo un cociente q_2 y el resto f_3 tal que

$$f_1 = f_2 q_2 + f_3 .$$

Nuevamente, si f_3 no es idénticamente nulo, la división de f_2 por f_3 lleva a otra identidad

$$f_2 = f_3 q_3 + f_4 \ ; \ \ldots \text{ etc.}$$

Desde que el grado de los polinomios f_1; f_2; f_3; ... disminuye y las operaciones pueden continuarse mientras el último resto obtenido no sea un polinomio idénticamente nulo, debemos llegar a un resto f_r que divida exactamente al resto precedente, de manera que tendremos r identidades:

$$\begin{aligned} f \quad &= f_1 q_1 + f_2 \\ f_1 \quad &= f_2 q_2 + f_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{r-2} &= f_{r-1} q_{r-1} + f_r \\ f_{r-1} &= f_r q_r . \end{aligned}$$

De estas identidades puede inferirse: primero: que f_r es un divisor común de f y f_1; y segundo: que cualquier divisor de estos polinomios divide a f_r. Para demostrar el primer punto observamos que f_r divide a f_{r-1}, por lo tanto divide también a

$$f_{r-2} = f_{r-1} q_{r-1} + f_r .$$

Nuevamente, desde que f_r divide a f_{r-1} y f_{r-2} dividirá a f_{r-3} y continuando de la misma manera, podemos deducir finalmente que f_r divide a f y f_1.

Para demostrar el segundo punto, supóngase que d divide a f y f_1. Entonces, como se puede ver de la identidad

$$f_2 = f - f_1 q_1 ,$$

d dividirá a f_1 y f_2. En la misma forma, la identidad

$$f_3 = f_1 - f_2 q_2$$

demuestra que d divide a f_2 y f_3; continuando el mismo razonamiento, concluímos que d divide a f_{r-1} y f_r. Desde que todo divisor común de f y f_1 divide a f_r, ninguno de ellos puede ser de mayor grado que f_r, por lo tanto, f_r es un divisor común de grado máximo; y, si d es otro divisor común del mismo grado, divide a f_r y el cociente es una constante. Luego, hay infinitos divisores comunes de f y f_1 de grado máximo, pero todos ellos son de la forma

$$cf_r$$

donde c es una constante arbitraria. En cuestiones de divisibilidad, los polinomios que difieren únicamente en un factor constante, no pueden ser considerados como esencialmente distintos. En este sentido hay un único máximo común divisor, que puede ser el polinomio f_r, determinado de acuerdo al algoritmo descripto anteriormente, o bien cf_r, donde la constante c se elige de manera de tener el resultado más simple.

Puede suceder que el mismo f_r sea una constante en este caso los polinomios no tienen divisores comunes y se denominan polinomios sin divisores comunes o polinomios primos entre sí. El procedimiento de divisiones sucesivas por medio del cual se determina el máximo común divisor es similar al algoritmo de Euclides que se usa en aritmética para encontrar el máximo común divisor de dos enteros. Por analogía se llama algoritmo de Euclides aplicado a los polinomios.

Ejemplo 1. Encontrar el máximo común divisor de

$$f = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

y

$$f_1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$$

El primer paso en el algoritmo de Euclides es dividir f por f_1. La división se realiza con los coeficientes separados como sigue:

1	2	0	1	3	3	2	1	4	4	—1	—2
1	4	4	—1	— 2			1	—2	4		
	—2	—4	2	5	3						
	—2	—8	—8	2	4						
		4	10	3	—1	2					
		4	16	16	—4	—8					
			—6	—13	3	10					

El primer resto es

$$f_2 = -6x^3 - 13x^2 + 3x + 10\,.$$

Ahora tenemos que dividir f_1 por f_2. Esta división introduciría coeficientes fraccionarios y, para evitar este inconveniente, podemos multiplicar f_1 por 6; de esta manera f_3

estará multiplicado por una constante, la cual no tiene importancia para nuestro propósito. La siguiente operación es, por lo tanto:

$$\begin{array}{rrrrr|rrrr} 6 & 24 & 24 & -6 & -12 & -6 & -13 & 3 & 10 \\ \cline{6-9} 6 & 13 & -3 & -10 & & -1 & -11 & & \\ \cline{1-4} & 11 & 27 & 4 & -12 & & & & \end{array}$$

Nuevamente, para evitar fracciones, multiplicamos los números del último renglón por 6; esto cambia el resto final de manera que en lugar del f_3 que obtendríamos por el procedimiento corriente, tendremos f_3 multiplicado por una constante. La operación continúa así:

$$\begin{array}{rrrr} 66 & 162 & 24 & -72 \\ 66 & 142 & -33 & -110 \\ \hline & 19 & 57 & 38\,. \end{array}$$

Todos los coeficientes tienen aquí el factor 19; simplificando podemos tomar como f_3

$$f_3 = x^2 + 3x + 2\,.$$

Téngase en cuenta que en el renglón en que se escriben los coeficientes del cociente, los números ya no representan dichos coeficientes. Pero esto no tiene importancia, ya que no nos interesan los cocientes, sino solamente los restos y de éstos no nos preocupan los factores constantes. Ahora tenemos que fividir f_2 por f_3. Esta división

$$\begin{array}{rrrr|rrr} -6 & -13 & 3 & 10 & 1 & 3 & 2 \\ \cline{5-7} -6 & -18 & -12 & & -6 & 5 & \\ \cline{1-3} & 5 & 15 & 10 & & & \\ & 5 & 15 & 10 & & & \\ \cline{2-4} & & 0 & & & & \end{array}$$

finaliza con resto nulo. Por lo tanto las operaciones terminan aquí y el máximo común divisor pedido puede ser

$$x^2 + 3x + 2\,.$$

Ejemplo 2. Encontrar el máximo común divisor de

$$f = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$$

y

$$f_1 = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$$

Aquí, antes de comenzar la división, se multiplican todos los coeficientes del primer polinomio por 5; entonces, el procedimiento continúa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lrrrrrr|rrrrr} & 5 & -5 & -10 & 10 & 5 & -5 & 5 & -4 & -6 & 4 & 1 \\ \cline{8-12} & 5 & -4 & -6 & 4 & 1 & & 1 & -1 & & & \\ \cline{2-6} \text{Multiplíquese} & & -1 & -4 & 6 & 4 & -5 & & & & & \\ \quad\text{por } 5 & & -5 & -20 & 30 & 20 & -25 & & & & & \\ & & -5 & 4 & 6 & -4 & -1 & & & & & \\ \cline{3-7} \text{Simplifíquese} & & & -24 & 24 & 24 & -24 & & & & & \\ \quad\text{por } 24 & & & 1 & -1 & -1 & 1 & & & & & \end{array}$$

Podemos tomar:

$$f_2 = x^3 - x^2 - x + 1$$

Luego:

$$
\begin{array}{rrrrr|rrrr}
5 & -4 & -6 & 4 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
5 & -5 & -5 & 5 & & \multicolumn{4}{l}{\overline{}} \\
\cline{1-4}
 & 1 & -1 & -1 & 1 & 5 & 1 & & \\
 & 1 & -1 & -1 & 1 & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

y puesto que no hay resto en esta división:

$$f_2 = x^3 - x^2 - x + 1$$

es el máximo común divisor pedido.

Nota: Si todas las identidades del algoritmo de Euclides aplicado a f y f_1 se multiplican por un polinomio arbitrario g, es evidente que

$$gf_2 \ ; \ gf_3; \ldots; gf_r$$

serán los restos sucesivos, de los cuales el último gf_r, divide al precedente gf_{r-1}. En conclusión: si el máximo común divisor de f y f_1 es d, el de gf y gf_1 será gd. En particular, si f y f_1 son primos entre sí, puede tomarse g como máximo común divisor de gf y gf_1. En el Capítulo XII se hará referencia a esta observación.

Problemas

Encuéntrese el máximo común divisor de los siguientes polinomios:

1. $f = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 1 \ ; \ f_1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$

2. $f = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 \ ; \ f_1 = x^3 - 3x - 2.$

3. $f = 2x^5 + 4x^4 + x^3 - x^2 + x + 1 \ ; \ f_1 = 6x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 1.$

4. $f = 2x^6 + 3x^5 + x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 4x + 5 \ ; \ f_1 = x^4 - x^3 - x - 1.$

5. $f = 10x^6 - 9x^5 - 12x^4 + 2x^2 - x - 1; f_1 = 4x^5 + x^4 - 7x^3 - 8x^2 - x + 1.$

CAPITULO III

LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS Y SUS RAICES

1. **Las ecuaciones algebraicas.** — Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales o complejos y grado $\geqq 1$. Igualándolo a cero tenemos la ecuación

$$f(x) = 0$$

que se llama ecuación *algebraica*. En esta ecuación la x representa un *número* desconocido que la *satisface*, es decir, que sustituído en $f(x)$ da cero como resultado. Cualquier número que satisface la ecuación propuesta se llama *raíz*; el problema de resolver una ecuación consiste en encontrar todas sus raíces. Las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ a menudo se llaman raíces del polinomio $f(x)$. Si el grado del polinomio es n se dice que la ecuación correspondiente es de grado n. De acuerdo a que sea $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, etc. tenemos las ecuaciones de la forma:

$$a_0 x + a_1 = 0$$
$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$
$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$
$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

etc.

de grado 1, 2, 3, 4, etc. o ecuaciones: lineal, cuadrática, cúbica, cuártica, etc. Se supone que el coeficiente principal a_0 es distinto de cero, aun cuando ninguna condición se impone a los otros coeficientes.

Si c es una raíz de la ecuación

$$f(x) = 0$$

se deduce del teorema del resto que $f(x)$ es divisible por $(x - c)$, así que

$$f(x) = (x - c) f_1(x)$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$, e inversamente, en caso de que $f(x)$ tenga el factor $x - c$, el número c es una raíz de este polinomio. Si c_1 es otra raíz distinta de c, tal que $f(c_1) = 0$, entonces, sustituyendo c_1 en la identidad precedente, tenemos:

$$(c_1 - c) f_1(c_1) = 0\,;$$

de donde, desde que $c_1 - c \neq 0$, se desprende que $f_1(c_1) = 0$, es decir, $f_1(x)$ es divisible por $x - c_1$, o sea:

$$f_1(x) = (x - c_1) f_2(x)$$

donde $f_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$. Por consiguiente:

$$f(x) = (x - c)(x - c_1) f_2(x)$$

lo que demuestra que, teniendo dos raíces distintas c y c_1, el polinomio es divisible por $(x - c)(x - c_1)$. Continuando de la misma forma, podemos concluir que $f(x)$ será divisible por

$$(x - c)(x - c_1) \ldots (x - c_{m-1})$$

si la ecuación $f(x) = 0$ tiene m raíces distintas: $c, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$.

Dos resultados importantes pueden derivarse de esta conclusión: Primero: queda demostrado que una ecuación de grado n no puede tener más de n raíces distintas. En efecto, supóngase que $c, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ son n raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$; entonces, $f(x)$ es de grado n y es divisible por $(x - c)(x - c_1) \ldots (x - c_{n-1})$, que es también un polinomio de grado n. Por lo tanto su cociente es necesariamente una constante que es igual al término principal a_0 de $f(x)$, de modo que:

$$f(x) = a_0 (x - c)(x - c_1) \ldots (x - c_{n-1})$$

y el producto del segundo miembro no puede anularse para otros valores de x distintos de $c, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. Segundo: si se conoce un número $m < n$ de raíces distintas $c, c_1, \ldots, c_{m-1}$, las raíces restantes se encontrarán resolviendo la ecuación reducida:

$$f_m(x) = \frac{f(x)}{(x - c)(x - c_1) \ldots (x - c_{m-1})} = 0,$$

de grado $n - m$. Para obtener la ecuación reducida es provechoso dividir sucesivamente por cada binomio $(x - c)(x - c_1) \ldots (x - c_{m-1})$, utilizando la regla de Ruffini.

Ejemplo 1. Resuélvase la ecuación cuártica:

$$x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$$

conociéndose dos raíces: -1 y 3. Los cálculos para obtener la ecuación reducida se disponen como sigue:

$-1)$	1	0	-5	-10	-6
$3)$	1	-1	-4	-6	0
		3	6	6	
	1	2	2	0	

La ecuación reducida es

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

y tiene las raíces

$$-1 + i \; ; \; -1 - i \, .$$

Por lo tanto, además de las dos raíces reales —1 y 3, la ecuación propuesta tiene dos imaginarias: $-1 + i$ y $-1 - i$; y siendo estas cuatro raíces distintas, no hay otras raíces. Al mismo tiempo se tiene el factoreo

$$x^4 - 5x^2 - 10x + 6 = (x + 1)(x - 3)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$$

del polinomio dado en factores lineales, dos de los cuales tienen coeficientes imaginarios. Sin embargo, al efectuar multiplicaciones tenemos:

$$(x + 1 + i)(x + 1 - i) = (x + 1)^2 + 1 = x^3 + 2x + 2$$

y es así que el mismo polinomio está factoreado ahora en dos factores lineales y uno cuadrático, pero de coeficientes reales

$$x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = (x + 1)(x - 3)(x^2 + 2x + 2) \, .$$

Aun cuando una ecuación de grado n no puede tener más de n raíces distintas, algunas veces el número de éstas puede ser menor que el grado de la ecuación. Así, en las ecuaciones:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^4 + x^3 = 0$$

la primera tiene sólo una raíz: -1; la segunda sólo dos raíces: 1 y -1, y la tercera dos: 0 y -1. Téngase en cuenta, sin embargo, que los polinomios correspondientes:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x - 1)(x + 1)$$

$$x^4 + x^3 = x.x.x.\,(x + 1)$$

están factoreados en 2, 3 y 4 factores lineales respectivamente, algunos de los cuales aparecen repetidos.

Problemas

1. Escríbase una ecuación cúbica con las raíces 0; 1; 2.

2. Escríbase una ecuación cúbica con las raíces 1; $1 + i$; $1 - i$.

3. Escríbase una ecuación cuártica con las raíces i; $-i$; $1 + i$; $1 - i$.

4. Resuélvase

$$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1 = 0$$

siendo $\dfrac{1}{2}$ una raíz.

5. Una raíz de la ecuación cúbica

$$x^3 - (2a + 1)x^2 + a(a + 2)x - a(a + 1) = 0$$

es $a + 1$. Hállense las restantes.

6. Resuélvase

$$2x^4 - x^3 - 17x^2 + 15x + 9 = 0$$

si: $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$ son raíces.

7. Hállese el polinomio de menor grado que se anula para $x = -1$; 0; 1 y toma el valor 1 para $x = 2$.

8. Hállese el polinomio de menor grado que se anula para $x = 0$; $2 + i$; $2 - i$ y toma los valores 1 y -1 para $x = -1$ y $x = 1$.

9. Resuélvase

$$x^3 - 2(1 + i)x^2 - (1 - 2i)x + 2(1 + 2i) = 0$$

dada la raíz $1 + 2i$.

10. Resuélvase

$$x^4 - (1 + 2i)x^3 + (-4 + i)x^2 + (3 + 6i)x + 3 - 3i = 0$$

dadas las raíces i y $\sqrt{3}$.

2. **Teorema de identidad.** — Del hecho de que el número de raíces distintas de una ecuación no puede exceder su grado, puede deducirse fácilmente el importante teorema que sigue:

Teorema de identidad. — Si dos polinomios $f(x)$ y $f_1(x)$, ambos de grado no superior a n, toman valores iguales para más de n valores distintos de x, son idénticos.

DEMOSTRACIÓN: Supóngase que $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son los $m > n$ números distintos para los cuales $f(x) = f_1(x)$, es decir, para los que

$$f(c_1) = f_1(c_1)\ ;\ f(c_2) = f_1(c_2)\ ;\ \ldots\ ; f(c_m) = f_1(c_m)\,.$$

Si

$$F(x) = f(x) - f_1(x)$$

no es un polinomio idénticamente nulo, entonces su grado m no es superior a n. Sin embargo, la ecuación

$$F(x) = 0$$

tiene m raíces $c_1, c_2, \ldots, c_m$ todas distintas por hipótesis. Dado que $m > n$, el número de raíces distintas de esta ecuación excede su grado, lo que es imposible. Por lo tanto $F(x)$ es idénticamente nulo y los polinomios $f(x)$ y $f_1(x)$ son idénticos término a término.

El teorema que se acaba de demostrar tiene útiles aplicaciones. Aquí enseñaremos solamente una.

Ejemplo. Por el desarrollo de Newton, para cualquier exponente entero y positivo n se verifica:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

Los coeficientes

$$1 \; ; \; \frac{n}{1} \; ; \; \frac{n(n-1)}{1.2} \; ; \; \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \; ; \; \dots$$

son los coeficientes binomiales. Introduciendo la notación usual

$$\binom{t}{r} = \frac{t(t-1)\dots(t-r+1)}{1.2\dots r}, \text{ para } r \geqq 1,$$

el desarrollo puede escribirse así:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

Escríbase un desarrollo análogo para otro exponente entero m:

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots + \binom{m}{m}x^m$$

y multiplíquense. El coeficiente de cualquier potencia x^k dada, debe ser el mismo en ambos miembros. Multiplicando los segundos miembros, este coeficiente resulta ser:

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{k-2}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k}$$

y debe ser el mismo que el coeficiente de x^k en el desarrollo del producto de los primeros miembros, es decir:

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}.$$

Se ve fácilmente que este coeficiente es

$$\binom{m+n}{k}.$$

Luego, tenemos una identidad numérica:

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{k-2}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{m+n}{k} \qquad (1)$$

para enteros positivos m, n, k arbitrarios. Reemplácese ahora a los enteros m y n por una variable x; el primero y segundo miembros de (1) se transformarán en polinomios

$$f(x) = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}\binom{x}{1} + \binom{x}{k-2}\binom{x}{2} + \dots + \binom{x}{k}$$

$$f_1(x) = \binom{2x}{k}$$

de grado k. Para todos los valores enteros $x = 1, 2, 3, \ldots$, por lo que se ha demostrado, estos polinomios toman iguales valores; luego, son idénticos y por lo tanto la identidad

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}\binom{x}{1} + \ldots + \binom{x}{k} = \binom{2x}{k}$$

se cumplirá para todo valor de x y no sólo para valores enteros. En particular, tomando $x = k$ y teniendo en cuenta que, en general

$$\binom{k}{k-i} = \binom{k}{i}$$

encontramos una expresión muy interesante para la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales

$$1 + \left(\frac{k}{1}\right)^2 + \left(\frac{k(k-1)}{1.2}\right)^2 + \left(\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\right)^2 + \ldots = \frac{(k+1)(k+2)\ldots 2k}{1.2\ldots k}.$$

Aquí, por supuesto, k es un entero positivo.

Por un razonamiento similar, pero un poco más complicado, puede demostrarse que para x e y arbitrarios

$$\binom{x}{y} + \binom{x}{k-1}\binom{y}{1} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{2} + \ldots + \binom{y}{k} = \binom{x+y}{k},$$

que generaliza (1). La demostración directa de estas expresiones sin recurrir al teorema de identidad no sería fácil.

Problemas

1. Usando las identidades de este párrafo demostrar

$$1 + \frac{k}{1} \cdot \frac{1}{2k-0} + \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1.3}{(2k-1)(2k-3)} + $$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1.3.5}{(2k-1)(2k-3)(2k-5)} \ldots = \frac{2.4.6\ldots 2k}{1.3.5\ldots(2k-1)}$$

para cualquier entero positivo k. Tómese $x = -\frac{1}{2}$.

2. $$1 + \frac{2k}{2k-3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2k(2k-1)}{(2k-3)(2k-5)} \frac{1}{2.4} +$$
$$\frac{2k(2k-2)(2k-4)}{(2k-3)(2k-5)(2k-7)} \frac{1.3}{1.4.6} + \ldots = 2$$

para cualquier entero positivo $k > 1$. Tómese $x = \frac{1}{2}$.

3. Tomando $x = -2$ demostrar que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

3. **El Teorema fundamental del Algebra.** — Nunca se recalcará suficientemente que no todo problema matemático que requiera la

determinación de algo, puede ser resuelto. Por ejemplo, si se requiere encontrar un número real cuyo cuadrado sea -1, es obvio que tal requerimiento es imposible de satisfacer. Por lo tanto, cuando se da una ecuación algebraica y tratamos de encontrar sus raíces, aún admitiendo los números complejos, no resulta evidente que el problema sea resoluble. En este caso, sin embargo, todas las dudas se disipan por un teorema que, debido a su importancia, se llama teorema fundamental del álgebra.

Teorema fundamental. — Toda ecuación algebraica con coeficientes complejos arbitarios tiene siempre por lo menos una raíz real o imaginaria.

Se conoce un gran número de demostraciones de este teorema, pero ninguna es suficientemente simple como para ser desarrollada en este lugar. Por lo tanto, lo tomaremos como base para desarrollos futuros, pero sin demostrarlo. La demostración se encontrará en el Apéndice I.

Sea f (x) un polinomio con coeficientes complejos, de grado n, y con coeficiente principal a_0. Por el teorema fundamental hay un número real o imaginario α_1 tal que $f(\alpha_1) = 0$. Luego $f(x)$ es divisible por $x - \alpha_1$ y podemos poner

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x),$$

siendo $f_1(x)$ un polinomio de grado $n - 1$ cuyo coeficiente principal es a_0. Por el mismo teorema, la ecuación

$$f_1(x) = 0$$

tiene una raíz real o imaginaria α_2, y por consiguiente:

$$f_1(x) = (x - \alpha_2) f_2(x)$$

donde $f_2(x)$ es de grado $n - 2$ y con coeficiente principal a_0. Si $n > 2$, el mismo razonamiento puede ser repetido hasta que se llegue a un polinomio de primer grado, $f_{n-1}(x)$, con la raíz α_n y coeficiente principal a_0, tal que

$$f_{n-1}(x) = a_0 (x - \alpha_n).$$

De la sucesión de identidades

$$f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x) \; ; \; f_1(x) = (x - \alpha_2) f_2(x) \; ; \; \ldots \; ;$$
$$f_{n-1}(x) = a_0 (x - \alpha_n)$$

por sucesivas sustituciones encontramos:

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Esto significa que todo polinomio de grado n puede ser factoreado en n factores lineales, no contando entre ellos la constante a_0. Estos factores

no necesitan ser distintos. Supóngase que entre los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tenemos

α números iguales a a

β números iguales a b

. . . .

λ números iguales a l

Luego, combinando los factores iguales, vemos que

$$f(x) = a_0 (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \ldots (x - l)^\lambda.$$

Los números $a, b, \ldots, l$ representan todas las raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$. Su número puede ser menor que n —grado de la ecuación— mientras que el número total de factores lineales es n. Para restablecer la correspondencia entre el número de raíces y el número de factores lineales se introduce la noción de raíz múltiple. Una raíz a, correspondiendo a la cual el factor $x - a$ aparece α veces, se dice que es una raíz de *multiplicidad* α y se cuenta como α raíces iguales a a. En el caso de que $\alpha = 1$, la raíz se llama raíz *simple*; en el caso de que $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$ se llama raíz *doble*, *triple*, *cuádruple*, etc. Si cada raíz se cuenta de acuerdo a la multiplicidad, la proposición de que una ecuación de grado n tiene siempre n raíces iguales o desiguales, es válida universalmente. Si a es una raíz de multiplicidad α, entonces en el factoreo de $f(x)$ el factor $x - a$ aparece α veces. Luego, $f(x)$ es divisible por $(x - a)^\alpha$, pero no es divisible por $(x - a)^{\alpha+1}$. En efecto, el cociente

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{(x - a)^\alpha} = a_0 (x - b)^\beta \ldots (x - l)^\lambda$$

no se anula para $x = a$, ya que todas las diferencias $a - b; \ldots; a - l$, son distintas de cero; luego $\phi(x)$ no es divisible por $(x - a)^{\alpha+1}$ La condición para que una raíz a sea de multiplicidad α puede ser expresada de una manera diferente. Desarrollando $f(x)$ en potencias de $(x - a)$, por la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x - a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x - a)^2 + $$
$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2.3 \ldots n}(x - a)^n$$

aparece claro que la divisibilidad por $(x - a)^\alpha$, requiere el cumplimiento de las siguientes condiciones:

$$f(a) = 0 \; ; \; f'(a) = 0 \; ; \; \ldots \; ; \; f^{(\alpha-1)}(a) = 0$$

y una vez que estas condiciones se satisfacen:

$$f(x) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{1.2\ldots}(x-a)^\alpha + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n .$$

Luego, si $f(x)$ no es divisible por $(x - a)^{\alpha+1}$, debe suceder que $f^{(\alpha)}(a)$ no sea cero. Consecuentemente, la condición para que una raíz a sea de multiplicidad α es que:

$$f(a) = 0 \;;\; f'(a) = 0 \;;\; \ldots \;;\; f^{(\alpha-1)}(a) = 0$$

pero

$$f^{(\alpha)}(a) \neq 0 .$$

Así, si a es raíz simple

$$f(a) = 0 \quad \text{pero} \quad f'(a) \neq 0 ;$$

si a es raíz doble

$$f(a) = f'(a) = 0 \quad \text{pero} \quad f''(a) \neq 0 ;$$

si a es raíz triple

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = 0 \quad \text{pero} \quad f'''(a) \neq 0$$

etc.

Ejemplo 1. La ecuación

$$f(x) = x^n - nx + n - 1 = 0; \; n > 1$$

se satisface para $x = 1$· ¿Cuál es la multiplicidad de esta raíz?

Tenemos

$$f'(x) = nx^{n-1} - n$$

$$f''(x) = n(n-1)\,x^{n-2}$$

Luego:

$$f(1) = 0 \quad ; \quad f'(1) = 0 \quad ; \quad f''(1) \neq 0$$

y 1, por lo tanto, es una raíz doble. El polinomio $f(x)$ es divisible por $(x - 1)^2$ pero no por $(x - 1)^3$.

Ejemplo 2. ¿Puede alguna otra raíz de la ecuación ser múltiple? Supóngase que una raíz α, diferente de 1, es raíz múltiple. Entonces:

$$f(\alpha) = \alpha^n - n\alpha + n - 1 = 0 \quad ; \quad f'(\alpha) = n(\alpha^{n-1} - 1) = 0 .$$

De la segunda condición

$$\alpha^{n-1} = 1 \quad ; \quad \alpha^n = \alpha$$

y sustituyendo α por α^n en la primera ecuación, tenemos

$$\alpha^n - n\alpha + n - 1 = (1 - n)(\alpha - 1) = 0 .$$

Pero esto es imposible desde que $\alpha - 1 \neq 0$ y $n > 1$.

Problemas

1. Escribir el polinomio de menor grado que para $x = 0$ toma el valor 1 y tiene las siguientes raíces: 1 y -1 como raíces simples, 2 como raíz doble y -3 como raíz triple.

2. Escribir un polinomio de séptimo grado con 0 y 1 como raíces dobles, -1 como raíz triple y que para $x = 2$ el polinomio tome el valor -1.

Descomponer en factores lineales los siguientes polinomios:

3. $x^3 - 1$.

4. $x^4 - 1$.

5. $x^6 - 1$.

6. $x^4 + 1$.

7. $x^3 - i$.

8. $x^3 - \dfrac{1+i}{2}$.

9. $x^4 + x^2 + 1$.

10. $x^4 - x^2 + 1$.

11. $x. - x^4 + 1$.

12. $(1 + xi)^4 + (1 - x\,i)^4$.

13. $x^4 + 3\,x^3 + x^2 - 3\,x - 2$.

14. $2\,x^5 - 3\,x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 - 1$.

15. $(x + i)^7 - x^7 - 1$.

* **16.** Escribiendo $\omega = \cos \dfrac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{n}$, demostrar que

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2) \ldots (x - \omega^{n-1}).$$

* **17.** Demostrar que

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \ldots \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Sugestión: Hágase $x = 1$ en la identidad del Prob. 16 y tómese el valor absoluto de ambos miembros.

* **18.** Demostrar que las raíces del polinomio

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

son $1, 2, 3, \ldots, n$ y factoréese.

* **19.** Si $f(0) \neq 0$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las raíces de $f(x) = 0$, demostrar que

$$f(x) = f(0)\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right).$$

* **20.** Encuéntrense las raíces de la ecuación

$$(1 + xi)^n + (1 - xi)^n = 0$$

y escríbase el factoreo de

$$\frac{(1 + xi)^n + (1 - xi)^n}{2}.$$

* **21.** Demuéstrese que el único polinomio de grado $n-1$ que se anula para $x = x_2$, $x_3, \ldots, x_n$ y toma el valor 1 para $x = x_1$ es

$$\frac{g(x)}{(x-x_1)\,g'(x_1)}$$

donde

$$g(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

* **22.** Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n números distintos y

$$g(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

Demuéstrese que el polinomio siguiente es de grado no superior a $n-1$:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_1)\,g'(x_1)}\,y_1 + \frac{g(x)}{(x-x_2)\,g'(x_2)}\,y_2 + \ldots + \frac{g(x)}{(x-x_n)\,g'(x_n)}\,y_n$$

y que para $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ toma los valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Demuéstrese también que tal polinomio es único. Esta fórmula —la fórmula de interpolación de Lagrange— resuelve el problema de la interpolación: Encontrar un polinomio del menor grado que para n valores dados de x: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, toma valores prescriptos $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

4. **Raíces imaginarias de ecuaciones con coeficientes reales.** — Todos los resultados establecidos anteriormente son válidos para ecuaciones con coeficientes complejos arbitrarios. Con respecto a las raíces imaginarias de ecuaciones con coeficientes reales tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA: *Si una ecuación con coeficientes reales tiene una raíz imaginaria $a + bi$ de orden de multiplicidad α, tiene también la conjugada $a - bi$ con la misma multiplicidad, o sea que las raíces imaginarias aparecen de a pares de conjugadas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

una ecuación con coeficientes reales y que tienen una raíz imaginaria $a + bi$ de multiplicidad α. Entonces:

$$f(a+bi) = 0\ ;\ f'(a+bi) = 0\ ;\ \ldots$$
$$\ldots\ ;\ f^{(\alpha-1)}(a+bi) = 0\ ;\ f^{(\alpha)}(a+bi) \neq 0\,.$$

La primera igualdad significa que:

$$a_0(a+bi)^n + a_1(a+bi)^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

Cuando se reemplaza cada número en el primer miembro por su conjugado, el resultado será un número conjugado de cero, es decir, cero

(Cap. I, párrafo 7). Por otra parte, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, como números reales, coinciden con sus propios conjugados, luego, el conjugado de la ecuación anterior es:

$$a_0 (a - bi)^n + a_1 (a - bi)^n + \ldots + a_n = 0$$

o sea

$$f(a - bi) = 0 .$$

En forma similar, se demuestra que:

$$f'(a - bi) = 0 \ ; \ldots ; \ f^{(\alpha-1)}(a - bi) = 0$$

y resta por demostrar que

$$f^{(\alpha)}(a - bi) \neq 0 .$$

Por hipótesis

$$f^{(\alpha)}(a + bi) = A + Bi$$

y A y B no son ambos nulos. El mismo razonamiento anterior demuestra que

$$f^{(\alpha)}(a - bi) = A - Bi$$

y este número es distinto de cero.

Del teorema que acabamos de demostrar se desprende que las raíces imaginarias de ecuaciones reales (es decir, ecuaciones con coeficientes reales) ocurren siempre de a pares de conjugadas y por ello su número es par. Si el número de raíces imaginarias es $2s$ y el de las reales es r:

$$r + 2s = n$$

siendo n el grado de la ecuación. En caso de que n sea impar, r debe ser impar y por lo tanto al menos 1, lo que significa que una ecuación real de grado impar tiene al menos una raíz real. Si es de grado par puede muy bien suceder que todas las raíces sean imaginarias.

A cada factor lineal

$$x - (a + bi) = x - a - bi$$

correspondiente a una raíz imaginaria $a + bi$, hay un factor

$$x - (a - bi) = x - a + bi$$

correspondiente a la raíz conjugada $a - bi$, y su producto

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

es un factor cuadrático con coeficientes reales. Luego, es posible sacar la conclusión que cualquier polinomio real puede ser factoreado en factores reales lineales y cuadráticos.

Ejemplo. Las raíces de la ecuación

$$x^4 + 1 = 0$$

son

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \;;\quad \frac{1-i}{\sqrt{2}} \;;\quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \;;\quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\,.$$

Desde que

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = x^2 - x\sqrt{2} + 1,$$

$$\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = x^2 + x\sqrt{2} + 1,$$

el factoreo de $x^4 + 1$ en factores cuadráticos reales es

$$x^4 + 1 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)\,.$$

Problemas

Descomponer en factores lineales y cuadráticos reales:

1. $x^4 + 4$.

2. $x^4 + x^2 + 1$.

3. $x^4 - x^2 + 1$.

4. $x^6 - 1$.

5. $x^6 + 1$.

6. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Resolver:

7. $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$, que admite la raíz $2 + 3i$.

8. $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x + 4 = 0$, que admite la raíz $1 + i$.

9. $x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$, que admite la raíz i.

10. $x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 = 0$, que admite la raíz i.

* **11.** $x^6 - x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 21x^2 - 9x - 54 = 0$, que admite la raíz $\sqrt{2} + i$.

* **12.** Los puntos representativos de las raíces de la ecuación $3x^3 + 4x^2 + 8x + 24 = 0$ están en un círculo con centro cero. Resuélvase.

* **13.** Si p, q, r son números reales y las raíces de la ecuación

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

tienen igual módulo, demostrar que:

$$p^3 r - q^3 = 0 \quad \text{y} \quad (p^2 - q)^2 \leqq 4q^2.$$

* **14.** La ecuación $2x^4 + x^3 - 2x - 8 = 0$ tiene cuatro raíces distintas de igual módulo. Resuélvasela.

* **15.** La ecuación $6x^4 - x^3 + 10x^2 - x + 6 = 0$ tiene cuatro raíces distintas de igual módulo. Resuélvasela.

5. **Relaciones entre las raíces y los coeficientes.** — Entre las raíces y los coeficientes de una ecuación hay relaciones que es importante conocer. Para descubrirlas, consideremos primero el desarrollo del producto

$$(x + b_1)(x + b_2) \ldots (x + b_n)$$

en potencias decrecientes de x, comenzando por los casos particulares $n = 2, 3, 4$. Por multiplicación directa se encuentra que:

$$(x + b_1)(x + b_2) = x^2 + (b_1 + b_2)x + b_1 b_2$$

$$(x + b_1)(x + b_2)(x + b_3) =$$
$$= x^3 + (b_1 + b_2 + b_3)x^2 + (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3)x + b_1 b_2 b_3$$

$$(x + b_1)(x + b_2)(x + b_3)(x + b_4) = x^4 + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)x^3 +$$
$$+ (b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4)x^2 +$$
$$+ (b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + b_1 b_3 b_4 + b_2 b_3 b_4)x + b_1 b_2 b_3 b_4 .$$

Al examinar estos resultados observamos que:

1. Cuando $n = 2$ el término principal es x^2, el coeficiente de x es la suma de las cantidades b_1 y b_2 y el término independiente de x es su producto.

2. Cuando $n = 3$, el término principal es x^3, el coeficiente de x^2 es la suma de las cantidades b_1, b_2 y b_3, el coeficiente de x es la suma de los productos de estas cantidades tomadas de a pares, y el término independiente de x es su producto.

3. Cuando $n = 4$ el término principal es x^4, el coeficiente de x^3 es la suma de las cantidades b_1, b_2, b_3 y b_4, el coeficiente de x^2 es la suma de los productos de las mismas tomadas de a pares, el coeficiente de x es la suma de los productos de las mismas tomadas de a tres y el término independiente de x es su producto.

Resulta, entonces, que la ley general para cualquier número de factores es la siguiente:

Sea

s_1 la suma de las cantidades $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$;

s_2 la suma de los productos de estas cantidades tomadas de a pares;

. . . .

s_i la suma de los productos de estas cantidades tomadas de a i;

. . . .

s_n el producto de todas ellas.

Entonces

$$P = (x + b_1)(x + b_2) \ldots (x + b_n) =$$
$$= x^n + s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} + \ldots + s_i x^{n-i} + \ldots + s_n .$$

Para demostrar que esta ley es general usaremos el principio de inducción completa. Suponiendo que la ley se verifica para n factores, demostraremos que se verifica para $n+1$. Una vez hecho esto, la validez de la ley estará establecida en general. Pues siendo verdadera para 2, 3, 4 factores, como hemos visto, se verificará para 5 factores, y luego para 6, etc. Para comenzar la demostración, multiplíquese la expresión supuesta para P por $x + b_{n+1}$, obteniendo

$$P\,(x+b_{n+1}) = x^{n+1} \begin{array}{l|l|l|l} +s_1 & x^n+s_2 & x^{n-1}+\ldots+s_i & x^{n+1-i}+\ldots+s_n b_{n+1} \\ +b_{n+1} & +b_{n+1}\,s_1 & \quad\quad\; b_{n+1}\,s_{i-1} & \end{array}$$

Ahora bien:

$$s_1 + b_{n+1}$$

es la suma de $n+1$ cantidades $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ y $s_n\, b_{n+1}$ es su producto como es evidente por la definición de s_n. Para $1 < i < n+1$

$$s_i + b_{n+1}\, s_{i-1}$$

es la suma de los productos de las cantidades $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$, tomadas de a i. En efecto, en esta suma podemos considerar primero los términos que no contienen b_{n+1}; la suma será evidentemente s_i. Los términos que contienen b_{n+1} son los productos de b_{n+1} por los productos de $i-1$ cantidades tomadas de entre $b_1, b_2, \ldots, b_n$; luego, la suma de todos esos términos es $b_{n+1}\, s_{i-1}$. En consecuencia, el coeficiente de x^{n+1-i}

$$s_i + b_{n+1}\, s_{i-1}$$

es la suma de todos los productos que pueden ser formados tomando i factores de entre $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$, como lo requiere la ley. Así, esta ley retiene su validez al pasar de n a $n+1$ factores, como lo establece la demostración por inducción.

Será conveniente introducir notaciones abreviadas y expresivas para designar las sumas previamente designadas por $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Usando el signo de sumatoria Σ, las representaremos así:

$$s_1 = \Sigma\, b_1 \quad ; \quad s_2 = \Sigma\, b_1 b_2\,; \ldots ; \quad s_i = \Sigma\, b_1 b_2 \ldots b_i\,.$$

Por ejemplo:

$$\Sigma\, b_1 b_2 \ldots b_i$$

significa la suma que consta de todos los términos resultantes del término genérico $b_1\, b_2 \ldots bi$ por el reemplazo de índices $1, 2, \ldots, n$. Desde que hay

$$C_n^i = \frac{n\,(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}$$

de tales combinaciones, la suma

$$\Sigma\, b_1 b_2, \ldots, b_i$$

consta de otros tantos términos.

Considerando ahora un polinomio

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

con raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (iguales o no), tenemos

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n).$$

Por otra parte, reemplazando en las expresiones $s_1, s_2, \ldots, s_n$ las letras $b_1, b_2, \ldots,$ por $-\alpha_1; -\alpha_2; \ldots; -\alpha_n$ tenemos

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) = x^n - x^{n-1} \Sigma\, \alpha_1 +$$
$$+ x^{n-2} \Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 - \ldots + (-1)^n \Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} &- a_0 \Sigma\, \alpha_1 = a_1 \\ &+ a_0 \Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 = a_2 \\ &- a_0 \Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(-1)^n a_0 \Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = a_n \end{aligned}$$

de donde, finalmente, se deducen las relaciones buscadas entre las raíces y los coeficientes de una ecuación:

$$\begin{aligned} &\Sigma\, \alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0} \\ &\Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i = (-1)^i \frac{a_i}{a_0} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \end{aligned}$$

Estas relaciones pueden ser utilizadas para resolver problemas del siguiente tipo:

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0$$

si el producto de dos raíces es 1. Sean las raíces a, b, c; entonces

$$a + b + c = \frac{16}{3}$$

$$ab + ac + bc = \frac{23}{3}$$

$$abc = \frac{6}{3} = 2$$

Además de estas relaciones generales tenemos que tomar en consideración la condición específica de que el producto de dos raíces es 1. Podemos indicar estas raíces con las letras a y b, de manera que:

$$ab = 1 .$$

Entonces, de la tercera relación, se encuentra inmediatamente que la raíz c es igual a 2, y para las a y b tenemos tres ecuaciones

$$a + b = \frac{10}{3}$$

$$a + b = \frac{10}{3}$$

$$ab = 1$$

dos de las cuales son idénticas; a y b serán raíces de la ecuación cuadrática

$$t^2 - \frac{10}{3} t + 1 = 0$$

que tiene las raíces 3 y $\frac{1}{3}$. Luego, las raíces de la ecuación propuesta son:

$$2;\ 3;\ \frac{1}{3} .$$

Ejemplo 2. Hállese la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación

$$2\,x^4 - 8\,x^3 + 6\,x^2 - 3 = 0 .$$

Si las raíces son a, b, c, d, tenemos:

$$a + b + c + d = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Sigma\, ab = ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{6}{2} = 3 .$$

Por otra parte:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\,\Sigma\, ab = 4^2$$

de donde

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - 6 = 10 .$$

Problemas

Resolver las ecuaciones cúbicas cuyas raíces son a, b, c:

1. $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$ si $a = b + c$.

2. $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ si $a + b = 0$.

3. $3x^3 + 2x^2 - 19x + 6 = 0$ si $a + b = -1$.

4. $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ si $ab = -1$.

5. $x^3 - 7x^2 - 42x + 216 = 0$ si $c^2 = ab$.

6. $x^3 + 9x^2 + 6x - 56 = 0$ si $b = -2a$.

7. $9x^3 - 36x^2 + 44x - 16 = 0$ si las raíces forman una progresión aritmética $\alpha - \beta$; α; $\alpha + \beta$.

8. $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$ si las raíces forman una progresión geométrica $\alpha\beta^{-1}$; α; $\alpha\beta$.

9. $2x^3 - 6x^2 + 3x + k = 0$. Determínese k y resuélvase la ecuación si $a = 2b + 2c$.

10. $x^3 - 2x^2 + kx + 46 = 0$. Determínese k y resuélvase la ecuación si las raíces están en progresión aritmética.

11. ¿Qué relación existe entre p, q, r si las raíces de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ están en progresión geométrica?

12. ¿Cuál es la relación entre p y q si la ecuación $x^3 + px + q = 0$ tiene una raíz múltiple?

13. Demostrar que $(2q - p^2)^3 r = (pq - 4r)^3$ si las raíces de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ satisfacen la condición $c^2 = -ab$.

Resuélvanse las ecuaciones cuárticas de raíces a, b, c, d:

14. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ si $a + b = 1$.

15. $2x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 15x - 5 = 0$ si $a = -b$.

16. $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = 0$ si $ab = 6$.

17. $x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ si $ab = -1$.

18. $2x^4 + 13x^3 + 25x^2 + 15x + 9 = 0$ si $a = b$.

19. $9x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 14x + 4 = 0$ si $a = 2b$.

20. $4x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 11x + 10 = 0$ si las raíces están en progresión aritmética. Represéntense las raíces por $\alpha - 3\beta$; $\alpha - \beta$; $\alpha + \beta$; $\alpha + 3\beta$.

21. Determínese k y resuélvase la ecuación $2x^4 - 15x^3 + kx^2 - 30x + 8 = 0$ si sus raíces están en progresión geométrica. Las raíces pueden representarse por $\alpha\beta^{-3}$; $\alpha\beta^{-1}$; $\alpha\beta$; $\alpha\beta^3$.

22. Hállese la suma de los cuadrados de las raíces de las ecuaciones:

(a) $$2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = 0.$$

(b) $$3x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0.$$

23. Para las mismas ecuaciones encuéntrense la suma de las recíprocas de las raíces y también la suma de los cuadrados de estas recíprocas.

Si entre las raíces de $f(x) = 0$ existe una relación tal como $a = kb$ o $ab = k$ con k dado, entonces $f(x)$ y $f_1(x) = f(kx)$ o $f_1(x) = x^n f\left(\frac{k}{x}\right)$ tiene n raíces comunes que pueden determinarse igualando a cero el máximo común divisor de $f(x)$ y $f_1(x)$. Resuélvase por este método:

24. Prob. 6.	**25.** Prob. 3.	**26.** Prob. 4.
27. Prob. 17.	**28.** Prob. 15.	**29.** Prob. 19.

6. **Investigación de las raíces múltiples.** — Con sólo realizar operaciones racionales, es posible investigar si una ecuación tiene raíces múltiples, determinar su grado de multiplicidad y reducir la búsqueda de éstas a la resolución de ecuaciones con raíces simples. Sean $a, b, \ldots, l$ raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$ y sean $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sus respectivos grados de multiplicidad. Desde que una raíz de $f(x)$ de multiplicidad k, es raíz de multiplicidad $k - 1$ (es decir, no lo es si $k = 1$) de la derivada $f'(x) = 0$, es evidente que $f(x)$ y $f'(x)$ son ambas divisibles por

$$(x - a)^{\alpha-1} (x - b)^{\beta-1} \ldots (x - l)^{\lambda-1}$$

y también lo será su máximo común divisor $D(x)$. Podemos hacer, por lo tanto

$$D(x) = (x - a)^{\alpha-1}(x - b)^{\beta-1} \ldots (x - l)^{\lambda-1} \,.\, \phi(x)\,.$$

Si $\phi(x)$ no es una constante, el polinomio $\phi(x)$ tendrá algún factor $x - m$ donde m es una raíz de $f(x)$, digamos $m = a$. Pero entonces $f'(x)$ sería divisible por $(x - a)^\alpha$, lo que es imposible desde que a es una raíz de multiplicidad $(\alpha - 1)$ para $f'(x)$. Por lo tanto $\phi(x)$ es una constante y

$$(x - a)^{\alpha-1} (x - b)^{\beta-1} \ldots (x - l)^{\lambda-1}$$

es el máximo común divisor de f y f'. Este hecho puede interpretarse de una manera diferente. Sea X_1 el producto de todos los factores lineales correspondientes a las raíces simples, X_2 el producto de todos aquellos que corresponden a raíces dobles, X_3 el producto de los que corresponden a raíces triples, etc., conviniendo en hacer X_k igual a una constante si la ecuación no tiene raíces de multiplicidad k. Entonces:

$$X_1 X_2^2 X_3^3 \ldots$$

difiere de $f(x)$ sólo en un factor constante, y luego

$$D = X_2 X_3^2 X_4^3 \ldots$$

será el máximo común divisor de f y f'. Similarmente

$$D_1 = X_3 X_4^2 \dots$$

será el máximo común divisor de D y su derivada D',

$$D_2 = X_4 X_5^2 \dots$$

el máximo común divisor de D_1 y D_1', etc. Esta sucesión de máximos comunes divisores

$$D, D_1, D_2, \dots$$

de grado decreciente, termina con un término D_{m-1} que es una constante. Entonces es evidente que no hay raíces de un orden de multiplicidad superior al m. Nuevamente:

$$f_1 = \frac{f}{D} = X_1 X_2 \dots X_m$$

$$f_2 = \frac{D}{D_1} = X_2 \dots X_m$$

$$f_3 = \frac{D_1}{D_2} = X_3 \dots X_m$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_m = \frac{D_{m-2}}{D_{m-1}} = X_m ,$$

de donde

$$\frac{f_1}{f_2} = X_1 \quad ; \quad \frac{f_2}{f_3} = X_2 \ ; \dots ; \ \frac{f_{m-1}}{f_m} = X_{m-1} \quad ; \quad f_m = X_m .$$

Las funciones $X_1, X_2, \dots, X_m$ determinadas de esta manera conducen a las ecuaciones

$$X_1 = 0 \quad ; \quad X_2 = 0 \ ; \dots ; X_m = 0$$

todas las cuales tienen raíces simples. Estas raíces dan inmediatamente las raíces dobles, triples, etc., de $f(x) = 0$. Naturalmente, si algún X_k resulta constante, significa que no hay raíces de multiplicidad k.

Ejemplo 1. Investigar las raíces múltiples de

$$f = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0 .$$

El máximo común divisor de f y f' fué determinado en el Ejemplo 2, pág. ..., y es

$$D = x^3 - x^2 - x + 1 .$$

Buscaremos ahora el máximo común divisor D_1 de D y

$$D' = 3x^2 - 2x - 1 .$$

Las operaciones correspondientes son:

$$
\begin{array}{l rrrr|rrr}
\text{(Multiplíquese por 3)} & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ \cline{6-8}
 & 3 & -3 & -3 & 3 & 1 & -1 & \\
 & 3 & -2 & -1 & & & & \\ \cline{2-5}
\text{(Multiplíquese por 3)} & & -1 & -2 & 3 & & & \\
 & & -3 & -6 & 9 & & & \\
 & & -3 & 2 & 1 & & & \\ \cline{3-5}
\text{(Simplifíquese el factor } -8) & & & -8 & 8 & & & \\
 & & & 1 & -1 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rr}
3 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ \cline{4-5}
3 & -3 & & 3 & 1 \\ \cline{1-2}
 & 1 & -1 & & \\
 & 1 & -1 & & \\ \cline{2-3}
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Por lo tanto, $D_1 = x - 1$ y $D_2 = 1$, lo que demuestra que la ecuación propuesta no tiene raíces de grado de multiplicidad superior al tercero. Para encontrar X_1, X_2, X_3 hacemos los cocientes

$$f_1 = \frac{f}{D} = x^2 - 1 \quad ; \quad f_2 = \frac{D}{D_1} = x^2 - 1 \quad ; \quad f_3 = \frac{D_1}{D_2} = x - 1 \ ;$$

y luego:

$$X_1 = 1 \quad ; \quad X_2 = x + 1 \quad ; \quad X_3 = x - 1 \ ;$$

de tal modo, la ecuación no tiene raíces simples, tiene una doble -1 y una triple 1, y es:

$$f = (x + 1)^2 (x - 1)^3 .$$

Ejemplo 2. Investigar las raíces múltiples de

$$f = x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2 = 0$$

Comenzaremos por determinar el máximo común divisor D de f y f'. Esta operación se desarrolla en detalle a continuación.

$$
\begin{array}{l rrrrrr|rrrrr}
\text{(Multiplíquese por 5)} & 1 & 0 & -1 & -4 & -3 & -2 & 5 & 0 & -3 & -8 & -3 \\ \cline{8-12}
 & 5 & 0 & -5 & -20 & -15 & -10 & 1 & & & & \\
 & 5 & 0 & -3 & -8 & -3 & & & & & & \\ \cline{2-7}
\text{(Simplifíquese por } -2) & & & -2 & -12 & -12 & -10 & & & & & \\
 & & & 1 & 6 & 6 & 5 & & & & &
\end{array}
$$

. . . .

$$
\begin{array}{l rrrrr|rrrr}
 & 5 & 0 & -3 & -8 & -3 & 1 & 6 & 6 & 5 \\ \cline{7-10}
 & 5 & 30 & 30 & 25 & & 5 & 10 & & \\ \cline{2-6}
\text{(Simplifíquese por } -3) & & -30 & -33 & -33 & -3 & & & & \\
 & & 10 & 11 & 11 & 1 & & & & \\
 & & 10 & 60 & 60 & 50 & & & & \\ \cline{3-6}
\text{(Simplifíquese por } -49) & & & -49 & -49 & -49 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & &
\end{array}
$$

. . . .

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & 6 & 6 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ \cline{5-7}
1 & 1 & 1 & & 1 & 5 & \\ \cline{1-3}
 & 5 & 5 & 5 & & & \\
 & 5 & 5 & 5 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Luego: $D = x^2 + x + 1$. La operación para determinar D_1 es:

(Multiplíquese por 2)

(Multiplíquese por 2)

$$\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \cline{4-5} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 2 & & \\ & 2 & 4 & & \\ & 2 & 1 & & \\ \cline{2-3} & & 3 & & \end{array}$$

Por lo tanto, D_1 es constante pudiendo tomarse $D_1 = 1$, de manera que no hay raíces de grado de multiplicidad superior al segundo. Luego:

$$f_1 = \frac{f}{D} = x^3 - x^2 - x - 2$$

$$f_2 = \frac{D}{D_1} = x^2 + x + 1$$

y

$$X_1 = \frac{f_1}{f_2} = x - 2 \quad ; \quad X_2 = f_2 = x^2 + x + 1 .$$

En consecuencia, la ecuación propuesta tiene una raíz simple 2 y dos raíces dobles

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad ; \qquad \omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

y f queda factoreado completamente como sigue:

$$x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = (x-2)(x-\omega)^2(x-\omega^2)^2 .$$

Problemas

Resuélvanse las siguientes ecuaciones, cada una de las cuales tiene raíces múltiples:

1. $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0.$

2. $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0.$

3. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0.$

4. $x^3 - 5x^2 - 8x + 48 = 0.$

5. $x^3 - x - \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = 0.$

6. $x^4 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{16} = 0.$

7. $x^4 - 11x^2 + 18x - 8 = 0.$

8. $x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x + 12 = 0.$

9. $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 36x - 27 = 0.$

10. $2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9 = 0$

11. $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0.$

12. $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6 = 0.$

13. $x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0.$

14. $x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32 = 0.$

15. $9x^5 + 96x^4 + 292x^3 + 48x^2 - 576x + 256 = 0.$

16. $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0.$

17. $x^8 + x^7 - 8x^6 - 6x^5 + 21x^4 + 9x^3 - 22x^2 - 4x + 8 = 0.$

CAPITULO IV

ACOTACION DE RAICES. RAICES RACIONALES

1. **Acotación de raíces.** — Dada una ecuación algebraica, a veces resulta conveniente tener una idea de la magnitud de sus raíces. Deben considerarse dos casos: si los coeficientes son reales y sólo nos preocupan las raíces reales, puede ser interesante hallar un número mayor que todas las raíces positivas o un número negativo menor que todas las posibles raíces negativas. Estos dos números, uno positivo y otro negativo, se llaman, respectivamente, una *cota superior* de las raíces positivas y una *cota inferior* de las raíces negativas. El segundo caso es el de una ecuación con coeficientes complejos cuando se consideran todas sus raíces, reales e imaginarias. Un número positivo mayor que los módulos de todas las raíces puede considerarse como cota superior de las mismas. Si llamamos r a dicho número, el círculo de centro cero y radio r contendrá todos los puntos que representan las raíces de la ecuación que se considera.

2. **Método para hallar una cota superior de las raíces positivas.** — Sea

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

una ecuación con coeficientes reales de los que supondremos positivo al primero: a_0. De los varios métodos que pueden usarse para hallar una cota superior de las raíces positivas consideraremos sólo uno, que combina las ventajas de dar valores comparativamente bajos de dicha cota con la facilidad de su aplicación.

Al considerar la Regla de Ruffini (Cap. II, Párrafo 5) hallamos polinomios:

$$f_0 = a_0 \;;\; f_1 = x f_0 + a_1 \;;\; f_2 = x f_1 + a_2 \;;\; \ldots \;; f_n = x f_{n-1} + a_n,$$

el último de los cuales coincide con f. Para $i = 1, 2, \ldots, n$ tenemos, en la misma forma:

$$f_i(x) = (x - c)\,[f_0(c)\,x^{i-1} + f_1(c)\,x^{i-2} + \ldots + f_{i-1}(c)] + f_i(c). \quad [1]$$

Los números

$$f_0(c) \;;\; f_1(c) \;;\; \ldots ; f_n(c),$$

son los obtenidos en la división por la Regla de Ruffini de las funciones $f_i(x)$ por $x - c$. El método para hallar una cota superior de las raíces positivas se basa en las dos propiedades siguientes de los polinomios $f_0, f_1, \ldots, f_n$: Primera: si para algún número positivo c los números

$$f_1(c) \;;\; f_2(c) \;;\; \ldots \;;\, f_{n-1}(c)\,,$$

no son negativos y $f_n(c) > 0$, entonces c puede tomarse como cota superior de las raíces positivas. De hecho, en la identidad [1] para $i = n$ se desprende que $f_n(x) = f(x) > 0$ para $x \geqq c$, de modo que ninguna raíz real de la ecuación $f(x) = 0$ puede ser superior a c o aún ser igual a c. Segunda: si para un $c > 0$ los números

$$f_1(c) \;;\; f_2(c) \;;\; \ldots \;;\, f_k(c)\,, \qquad k \leqq n$$

no son negativos, entonces para $c' > c$

$$f_1(c') \;;\; f_2(c') \;;\; \ldots \;;\, f_k(c')\,,$$

son positivos. Esto también surge de la identidad [1], en la que hacemos $x = c'$; entonces:

$$f_i(c') = (c' - c)\,[f_0(c)\,c'^{i-1} + \ldots + f_{i-1}(c)] + f_i(c)\,,$$

es un número positivo para $i = 1, 2, \ldots, k$ desde que $c' > c$ y $f_0(c) = a_0 > 0$.

Estas dos simples propiedades sugieren el siguiente procedimiento para hallar una cota superior de las raíces positivas: Primero comenzamos con un número positivo c, preferiblemente entero, que haga $f_1(c)$ positivo o nulo. Tal número se halla fácilmente dado que $f_1(x)$ es de primer grado. Si resulta que ninguno de los números

$$f_2(c) \;;\; f_3(c) \;;\; \ldots \;;\, f_n(c)\,,$$

son negativos, y siendo $f_n(c) > 0$, podemos tomar c como una cota superior. Si sucede que $f_n(c) = 0$, entonces se ha hallado una raíz y las demás raíces positivas serán menores que c. Pero, supongamos que $f_{k+1}(c)$ es negativo, mientras que ninguno de los números precedentes

$$f_1(c) \;;\; f_2(c) \;;\; \ldots \;;\, f_k(c)\,,$$

lo son. Entonces el proceso puede repetirse nuevamente, probando con enteros mayores que c hasta que con alguno, por ejemplo c_1, se halle que

$$f_{k+1}(c) \geqq 0\,.$$

Al mismo tiempo todos los números

$$f_1(c_1) \;;\; f_2(c_1) \;;\; \ldots \;;\, f_k(c_1)\,,$$

serán positivos. Ahora, si

$$f_1(c_1) \;;\; f_2(c_1) \;;\; \ldots \;;\, f_n(c_1)\,,$$

no son negativos y $f_n(c_1) > 0$, entonces c_1 puede tomarse como una cota superior. En caso contrario el proceso se repite una vez más con un entero mayor, etc. De esta manera la cota pedida puede hallarse luego de relativamente pocas pruebas. Cuando algunos de los coeficientes son números negativos grandes, es ventajoso hacer pruebas preliminares, tomando para c los valores 10, 100, 1000, etc., y reduciendo entonces la cota hallada tanto como se pueda usando este método. Si se desea hallar una cota inferior de las raíces negativas, podemos hacer primero la sustitución $x = -y$ y entonces buscar una cota superior de las raíces positivas de la ecuación transformada

$$a_0 y^n - a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n = 0 .$$

Si la cota superior es c, entonces evidentemente $-c$ será una cota inferior de las raíces negativas de la ecuación original.

Ejemplo 1. Hallar una cota superior de las raíces positivas de la ecuación

$$2x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0 .$$

Para hacer $f_1 = 2x - 7$ positivo, comenzamos con $c = 4$ y aplicamos el procedimiento de la Regla de Ruffini de la siguiente manera:

4)	2	—7	—5	6	3	—10
		8	4			
	2	1	—1			

Al ser negativo el tercer número, probamos con 5:

5)	2	—7	—5	6	3	—10
		10	15	50	280	1415
	2	3	10	56	283	1405

Por lo tanto, 5 puede ser tomado como cota superior de las raíces positivas.

Ejemplo 2. Hallar una cota superior de las raíces positivas de la ecuación

$$x^5 - 7x^4 - 100x^3 - 1000x^2 + 10x - 50 = 0 .$$

Como hay coeficientes negativos grandes comenzamos a probar con el número 10:

10)	1	—7	—100	—1000	10	—50
		10	30			
	1	3	— 70			

La presencia de un número negativo indica que debemos probar con un número mayor que 10; lo hacemos con 20:

20)	1	—7	—100	—1000	10	—50
		20	260			
	1	13	160			

y sin seguir adelante se ve que los números restantes serán positivos. Por lo tanto 20 es con certeza una cota superior de las raíces positivas. Si se considera conveniente reducir esta cota, podemos probar con números menores: 19, 18, 17, etc. En esta forma se halla que 17 puede tomarse como cota superior, no así 16, si queremos satisfacer las condiciones impuestas por el método.

Ejemplo 3. Hallar una cota inferior de las raíces negativas de la ecuación

$$2x^6 + 20x^5 + 30x^3 + 50x + 1 = 0 .$$

Hacemos $x = -y$ y escribimos la ecuación resultante en y:

$$2y^6 - 20y^5 - 30y^3 - 50y + 1 = 0 .$$

Comenzando con $c = 10$ y probando luego 11, hallamos:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} 11) & 2 & -20 & 0 & -30 & 0 & -50 & 1 \\ & & 22 & 22 & 242 & & & \\ \hline & 2 & 2 & 22 & 212 & & & \end{array}$$

y se llega a la conclusión de que 11 puede tomarse como una cota superior de las raíces positivas de la ecuación en y. Por lo tanto, -11 es una cota inferior de las raíces negativas de la ecuación propuesta.

Problemas

Hallar las cotas de las raíces de las ecuaciones:

1. $x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 30 = 0.$

2. $x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 16x - 50 = 0.$

3. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 15x - 3 = 0.$

4. $3x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 10x - 27 = 0.$

5. $-6x^4 + 20x^3 - 6x^2 - 5x + 10 = 0.$

6. $x^5 + 8x^4 - 14x^3 - 53x^2 + 56x - 18 = 0.$

7. $x^5 - 5x^4 - 13x^3 + 2x^2 + x - 70 = 0.$

8. $x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 100 = 0.$

9. $x^6 - 5x^5 + x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 1 = 0.$

10. $6x^5 + 27x^4 - 100x^3 - 200x - 50 = 0.$

3. **Cotas de los módulos de las raíces.** — Dada una ecuación

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 ,$$

con coeficientes complejos arbitrarios, el problema de hallar una cota superior de los módulos de sus raíces puede sustituirse por la determinación de una cota superior de las raíces positivas de una cierta ecuación auxiliar.

Sean a y b dos números complejos. Haciendo

$$a = (a + b) + (-b),$$

y aplicando el teorema referente al módulo de la suma (Cap. I, Párrafo 7), hallamos la desigualdad

$$|a| \leqq |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|,$$

se deduce, en consecuencia, que

$$|a + b| \geqq |a| - |b|.$$

Haciendo en esta desigualdad

$$a = a_0 x^n \quad ; \quad b = a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

siendo x un número complejo arbitrario; será, entonces:

$$|f(x)| \geqq |a_0 x^n| - |a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n|.$$

Si ahora es:

$$|x| = r \quad ; \quad |a_i| = A_i \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

entonces

$$|a_0 x^n| = A_0 r^n$$

y

$$|a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n| \leqq A_1 r^{n-1} + \ldots + A_n,$$

para el mismo teorema. Entonces:

$$|f(x)| \geqq A_0 r^n - A_1 r^{n-1} - \ldots - A_n.$$

Sea R un límite superior de las raíces positivas de la ecuación auxiliar

$$A_0 x^n - A_1 x^{n-1} - \ldots - A_n = 0.$$

Entonces:

$$A_0 R^n - A_1 R^{n-1} - \ldots - A_n > 0,$$

y, puesto que:

$$A_0 r^n - A_1 r^{n-1} - \ldots - A_n = r^n \left(A_0 - \frac{A_1}{r} - \ldots - \frac{A_n}{r^n}\right),$$

crece al crecer r, tendremos:

$$A_0 r^n - A_1 r^{n-1} - \ldots - A_n > 0,$$

para $r \geqq R$. Por lo tanto

$$|f(x)| > 0,$$

si $|x| \geqq R$, y esto significa que los módulos de todas las raíces de la

ecuación propuesta son menores que R, y, por lo tanto, este número puede tomarse como la cota superior pedida.

Ejemplo. Hallar una cota superior de los módulos de las raíces de la ecuación

$$2x^6 - 7x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 60x^2 + 10x - 50 = 0.$$

La ecuación auxiliar es, en este caso:

$$2x^6 - 7x^5 - 10x^4 - 30x^3 - 60x^2 - 10x - 50 = 0.$$

Por el método del Párrafo 2 se halla que $R = 6$ es una cota superior de sus raíces positivas. Por lo tanto, todas las raíces de la ecuación propuesta tienen módulos menores que 6.

Problemas

Hallar las cotas de los módulos de las raíces de las ecuaciones

1. $2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 5 = 0$.

2. $6x^5 - 10x^4 + 7x^3 + 8x - 10 = 0$.

3. $ix^4 + 4x^3 - (3 + 4i)x^2 + 4x - 1 - i = 0$.

4. $2x^5 - ix^3 + (5 + 5i)x^2 + (3 + 2i)x - 10 = 0$.

* **5.** Si $a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a > 0$, demostrar que ninguna raíz de la ecuación

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

tiene módulo mayor que 1.

Sugestión: Nótese que

$$|(1 - x) f(x)| \geqq a_0 |x|^n - [(a_0 - a_1)|x|^{n-1} + (a_1 - a_2)|x|^{n-2} + \ldots a_n)]$$

y que el segundo miembro es positivo si $|x| > 1$.

* **6.** Si los coeficientes de la ecuación

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

son positivos, y λ es el mayor de los números

$$\frac{a_1}{a_0}\;;\;\frac{a_2}{a_1}\;;\;\frac{a_3}{a_2}\;;\;\ldots\;;\;\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

demostrar que los módulos de las raíces no son mayores que λ.

Sugestión: Sea $x = \lambda y$ y aplíquese el Problema 5 a la ecuación en y.

4. **Raíces enteras.** — En el resto de este capítulo consideraremos ecuaciones con coeficientes racionales. Escribiendo los coeficientes de tal ecuación como fracciones con un denominador común y multiplicando por el denominador a ambos miembros de la ecuación, reempla-

zamos esta última por una ecuación equivalente con coeficientes enteros. Sea esta ecuación

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

la que puede tener raíces racionales; el problema es cómo hallar tales raíces si existen, o cómo demostrar su inexistencia. Veremos que estas raíces racionales pueden ser halladas una vez encontradas las raíces enteras, y por lo tanto, es necesario explicar primero cómo pueden hallarse las raíces enteras. Supongamos que $x = c$ es una raíz entera, es decir que:

$$a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_{n-1} c + a_n = 0,$$

o también

$$c\,(a_0 c^{n-1} + \dots + a_{n-1}) = -a_n.$$

En el primer miembro ambos factores son enteros, puesto que tanto c como $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ son enteros y en consecuencia es divisible por c. Por lo tanto, las raíces enteras, si las hay, son divisores positivos o negativos del último término a_n. Por consiguiente, el problema de hallar raíces enteras se reduce inmediatamente a un número finito de pruebas: primero, buscar todos los divisores positivos y negativos de a_n y luego, probar sucesivamente cada uno de ellos, por sustitución directa en la ecuación dada. De esta manera pueden hallarse todas las raíces enteras o se demostrará que tales raíces no existen. En la práctica, cuando el número de divisiones a probar es grande, es preferible disminuir la cantidad de pruebas excluyendo los divisores que no son posibles raíces. Con este fin se determina primero una cota superior de las raíces positivas y una cota inferior de las raíces negativas y se conservan sólo aquellos divisores que se encuentran entre estas cotas. De estos divisores pueden excluirse algunos, de acuerdo a la siguiente observación: Si a es un entero cualquiera y c una raíz entera, entonces $f(a)$ es divisible por $c - a$. Evidentemente, si c es una raíz, tendremos:

$$f(x) = (x - c)\,f_1(x)$$

siendo los coeficientes de $f_1(x)$ enteros. Sustituyendo aquí $x = a$, se deduce que:

$$f(a) = (a - c)\,f_1(a),$$

y, por ser $f_1(a)$ un entero, $f(a)$ es divisible por $c - a$. Entre los divisores a probar están siempre 1 y -1. De acuerdo a ésto, calculamos $f(1)$ y $f(-1)$ por la Regla de Ruffini; si ninguno de estos valores numéricos es cero, excluímos todos los divisores c tales que $c - 1$ no divida a $f(1)$, y a todos los divisores tales que $c + 1$ no divida a $f(-1)$. Entonces, en general, tomando un divisor cualquiera d, calculamos $f(d)$

y si $f(d) \neq 0$, excluímos todos aquellos divisores c para los que $f(d)$ no es divisible por $c - d$. De esta manera el número de divisores para los tanteos se reduce considerablemente. Una vez hallada una raíz entera c, es conveniente comprobar si es múltiple. Supongamos que resulte ser de un orden de multiplicidad α; entonces, los demás divisores se probarán en la ecuación reducida.

$$F(x) = \frac{f(x)}{(x-c)^\alpha} = 0.$$

Ejemplo 1. Averiguar si la ecuación

$$x^6 + 3x^5 - 36x^4 - 45x^3 + 93x^2 + 132x + 140 = 0$$

tiene o no raíces enteras. El primer paso es hallar cotas de las raíces por el método del Párrafo 2. Se encuentra que las raíces son menores que 6 y mayores que -8. Siendo:

$$140 = 2^2 . 5 . 7$$

los divisores positivos menores que 6 son:

$$1;\ 2;\ 4;\ 5$$

y los divisores negativos mayores que -8 son:

$$-1;\ -2;\ -4;\ -5;\ -7$$

Se comprueban 1 y -1 por la Regla de Ruffini

1)	1	3	−36	−45	93	132	140
	1	4	−32	−77	16	148	288 $= f(1)$
−1)	1	3	−36	−45	93	132	140
	1	2	−38	− 7	100	32	108 $= f(-1)$

De los divisores positivos debe excluirse 4 puesto que $4 + 1 = 5$ no divide a $f(-1) = 108$. De los divisores negativos debe excluirse -4 puesto que $-4 - 1 = -5$ no divide a $f(1) = 288$. Quedan por probar los siguientes divisores:

$$2;\ -2;\ 5;\ -5;\ -7\,.$$

Probamos primeramente 2:

2)	1	3	−36	− 45	93	132	140
		2	10	− 52	−194	−202	−140
2)	1	5	−26	− 97	−101	− 70	0 $= f(2)$
		2	14	− 24	−242	−686	
	1	7	−12	−121	−343	−756 $= f_1(2)$	

En consecuencia, 2 es una raíz simple y la ecuación reducida es:

$$f_1(x) = x^5 + 5x^4 - 26x^3 - 97x^2 - 101x - 70 = 0\,.$$

Probamos ahora —2:

—2)	1	5	—26	—97	—101	—70
		—2	— 6	64	66	70
—2)	1	3	—32	—33	— 35	$0 = f_2(-2)$
		—2	— 2	68	— 70	
		1	—34	35	$-105 = f_2(-2)$	

Por lo tanto, —2 es una raíz simple y la segunda ecuación reducida es:

$$f_2(x) = x^4 + 3x^3 - 32x^2 - 33x - 35 = 0 .$$

Probamos ahora 5:

5)	1	3	—32	—33	—35	
		5	40	40	35	
5)	1	8	8	7	$0 = f_2(5)$	
		5	65	365		
	1	13	73	$372 = f_3(5)$		

Por lo tanto, 5 es una raíz simple y la tercera ecuación reducida es:

$$f_3(x) = x^3 + 8x^2 + 8x + 7 = 0 .$$

Al no dividir —5 a 7, es inútil probar —5. Probamos —7:

—7)	0	8	8	7
		—7	—7	—7
	1	1	1	$0 = f_3(-7)$

En consecuencia, —7 es la raíz entera y la cuarta ecuación reducida es:

$$x^2 + x + 1 = 0 ,$$

que admite las raíces imaginarias:

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\,\frac{3}{2} \quad ; \quad \omega^2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{3}{2} .$$

Por lo tanto, las raíces de la ecuación propuesta son:

$$2;\ -2;\ 5;\ -7;\ \omega;\ \omega^2 .$$

Ejemplo 2. Investíguese si la ecuación

$$x^5 + x^4 - 20x^3 - 44x^2 - 21x - 45 = 0 ,$$

tiene o no raíces enteras. Por el método del Párrafo 2, se halla que las raíces son menores que 6 y mayores que —5. Los divisores de $45 = 3^2\,5$ contenidos entre estas cotas son:

$$1;\ -1;\ 3;\ -3;\ 5 ,$$

Probamos primero 1 y —1

$$\begin{array}{rrrrrrl}
1) & 1 & 1 & -20 & -44 & -21 & -45 \\
 & 1 & 2 & -18 & -62 & -83 & \underline{-128 = f(1)} \\
-1) & 1 & 1 & -20 & -44 & -21 & -45 \\
 & 1 & 0 & -20 & -24 & 3 & \underline{-48 = f(-1)}
\end{array}$$

No se desecha ninguno de los divisores 3, —3 y 5 porque si les restamos 1 dividen a —128 y si les sumamos 1 dividen a 48. Probamos 3:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
3) & 1 & 1 & -20 & -44 & -21 & -45 \\
 & & 3 & 12 & -24 & -204 & -675 \\
\hline
 & 1 & 4 & -8 & -68 & -225 & \underline{-720 = f(3)}
\end{array}$$

Por lo tanto 3 no es una raíz pero $-3-3=-6$; $5-3=2$ son divisores de 720; en consecuencia es necesario probar —3 y 5. Probamos primero —3:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
-3) & 1 & 1 & -20 & -44 & -21 & -45 \\
 & & -3 & 6 & 42 & 6 & 45 \\
\hline
-3) & 1 & -2 & -14 & -2 & -15 & \underline{0 = f(-3)} \\
 & & -3 & 15 & -3 & 15 & \\
\hline
-3) & 1 & -5 & 1 & -5 & \underline{0 = f'(-3)} & \\
 & & -3 & 24 & -75 & & \\
\hline
 & 1 & -8 & 25 & -80 & &
\end{array}$$

Por consiguiente, —3 es una raíz doble y la ecuación reducida es

$$f_1(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0\,.$$

Finalmente probamos 5:

$$\begin{array}{rrrrl}
5) & 1 & -5 & 1 & -5 \\
 & & 5 & 0 & 5 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \underline{0 = f_1(5)}
\end{array}$$

Y, por lo tanto, 5 es una raíz y la segunda expresión reducida es:

$$x^2 + 1 = 0\,.$$

En consecuencia, la ecuación propuesta tiene las siguientes raíces: —3, raíz doble; 5; i; $-i$, raíces simples.

Problemas

Hallar las raíces enteras de:

1. $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0.$

2. $x^3 - 9x^2 + 22x - 24 = 0.$

3. $x^3 - 106x - 420 = 0.$

4. $x^4 - x^3 - 13x^2 + 16x - 48 = 0.$

5. $x^4 - x^3 - x^2 + 19x - 42 = 0.$

6. $x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 49x + 56 = 0.$

7. $x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 10x + 24 = 0.$

8. $x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 21x + 270 = 0.$

9. $x^6 - 7x^5 - 11x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 28x + 40 = 0.$

10. $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0.$

11. Probar que, si tanto $f(0)$ como $f(1)$ son números impares, la ecuación $f(x) = 0$ con coeficientes enteros no puede tener raíces enteras.

12. Demostrarlo si ninguno de los tres números $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$ es divisible por 3.

5. **Raíces racionales.** — Las raíces racionales de una ecuación

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0,$$

con el primer coeficiente 1 y los demás enteros, sólo pueden ser enteras. Sea $\frac{r}{s}$ una raíz racional, de modo que r y s sean enteros y primos entre sí. Sustituyendo esta raíz en la ecuación y eliminando denominadores tendremos:

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_{n-1} r s^{n-1} + p_n s^n = 0,$$

o bien

$$r^n = s(-p_1 r^{n-1} - \ldots - p_n s^{n-1}).$$

Por ser

$$p_1 r^{n-1} + \ldots + p_n s^{n-1},$$

un entero, r^n es divisible por s y esto sólo es posible si $s = 1$, por no tener r y s divisores comunes. Por lo tanto la supuesta raíz racional $\frac{r}{s}$ es una raíz entera. Empleando esta proposición, vemos que las raíces racionales de una ecuación

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

pueden hallarse de la siguiente manera: Si x es una raíz racional,

$$y = a_0 x,$$

será una raíz racional de la ecuación

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_0 a_2 y^{n-2} + \ldots + a_0^{n-1} a_n = 0,$$

cuyo primer coeficiente es 1 y los demás enteros. En consecuencia, y es una raíz entera y (si existe) puede hallarse por el método del Párrafo 4. A veces puede simplificarse el trabajo haciendo la sustitución

$$x = \frac{y}{k},$$

y eligiendo k de modo que sea el menor entero que haga enteros a todos los coeficientes de la ecuación resultante

$$y^n + \frac{ka_1}{a_0} y^{n-1} + \frac{k^2 a_2}{a_0} y^{n-2} + \ldots + \frac{k^n a_n}{a_0} = 0 .$$

La elección de $k = a_0$ es siempre posible; pero a veces, un valor menor de k cumple todos los requisitos establecidos.

Ejemplo 1. Hallar las raíces racionales de la ecuación:

$$6 x^4 - 7 x^3 + 8 x^2 - 7 x + 2 = 0 .$$

Haciendo

$$x = \frac{y}{6} ,$$

la ecuación transformada en y es:

$$f(y) = y^4 - 7 y^3 + 48 y^2 - 252 y + 432 = 0 .$$

Esta ecuación no tiene raíces negativas y todas sus raíces positivas son menores que 7. Los divisores de $432 = 2^4 3^3$ menores que esta cota son:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6 .$$

Como $f(1) = 222$ no es divisible por $6 - 1 = 5$, no es necesario probar con 6. Probando con 2, 3 y 4 hallamos:

2)	1	—7	48	—252	432
		2	—10	76	—352
	1	—5	38	—176	80 = $f(2)$
3)	1	—7	48	—252	432
		3	—12	108	—432
	1	—4	36	—144	0 = $f(3)$
4)	1	—4	36	—144	
		4	0	144	
	1	0	36	0 = $f(4)$	

En consecuencia, 3 y 4 son los únicos valores enteros de y, que corresponden a las dos raíces racionales de la ecuación propuesta:

$$x_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} .$$

Ejemplo 2. Hallar las raíces racionales de la ecuación:

$$25 x^4 - 70 x^3 - 126 x^2 + 414 x - 243 = 0 .$$

Sustituyendo

$$x = \frac{y}{k} ,$$

la ecuación en y es:

$$y^4 - \frac{70}{25} k y^3 - \frac{126}{25} k^2 y^2 + \frac{414}{25} k^3 y - \frac{243}{25} k^4 = 0\,,$$

y basta con tomar $k = 5$ para hacer enteros todos sus coeficientes. Eligiendo así k la ecuación será:

$$f(y) = y^4 - 14\,y^3 - 126\,y^2 + 2070\,y - 6075 = 0\,.$$

Todas las raíces se encuentran comprendidas entre -15 y 21 y los divisores de $6075 = 3^5 . 5^2$ entre estas cotas son:

$$1;\ 3;\ 9;\ 5;\ 15;\ -1;\ -3;\ -9;\ -5\,.$$

Calculando $f(1) = -4144$ y $f(-1) = -8256$ desechamos -5; 9 y -9. Probamos 3 y -3:

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
3) & 1 & -14 & -126 & 2070 & -6075 & \\
 & & 3 & -33 & -477 & 4779 & \\
\hline
 & 1 & -11 & -159 & 1593 & -1296 & = f(3) \\
-3) & 1 & -14 & -126 & 2070 & -6075 & \\
 & & -3 & 51 & 225 & -6885 & \\
\hline
 & 1 & -17 & -75 & 2295 & -12960 & = f(3)
\end{array}$$

Quedan por probar 5 y 15

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
5) & 1 & -14 & -126 & 2070 & -6075 & \\
 & & 5 & -45 & -855 & 6075 & \\
\hline
15) & 1 & -9 & -171 & 1215 & 0 & = f(5) \\
 & & 15 & 90 & -1215 & & \\
\hline
 & 1 & 6 & -81 & 0 & &
\end{array}$$

Por lo tanto, $y = 5$ e $y = 15$ son raíces de la ecuación auxiliar en y, y

$$x_1 = \frac{15}{5} = 3 \quad ; \quad x_2 = \frac{5}{5} = 1\,,$$

son las únicas raíces racionales de la ecuación propuesta. Si hubiéramos encontrado primero las raíces enteras y luego hubiéramos pasado a investigar las raíces fraccionarias, las hubiéramos determinado en un número menor de cálculos.

Problemas

Hallar las raíces racionales de las siguientes ecuaciones:

1. $3\,x^3 - 26\,x^2 + 34\,x - 12 = 0.$

2. $2\,x^3 + 12\,x^2 + 13\,x + 15 = 0.$

3. $6\,x^3 - x^2 + x - 2 = 0.$

4. $10\,x^3 + 19\,x^2 - 30\,x + 9 = 0.$

5. $2\,x^3 - x^2 + 1 = 0.$

6. $x^3 - 3\,x + 1 = 0.$

7. $6\,x^4 - 11\,x^3 - x^2 - 4 = 0.$

8. $4\,x^4 - 11\,x^2 + 9\,x - 2 = 0.$

9. $2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$. **10.** $6x^5 + x^4 - 14x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$.

11. $6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$.

12. $2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0$.

*** 13.** Si un polinomio de grado $\leqq 5$ con coefcientes racionales tiene raíces múltiples, tiene también una raíz racional, excepto en el caso de que el grado sea 4 y el polinomio sea un cuadrado perfecto.

*** 14.** ¿Cómo puede utilizarse esta demostración para averiguar la existencia de raíces múltiples de ecuaciones cuyo grado no pase de 5? Considérense los ejemplos:

$$(a) \quad x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 13x + 6 = 0\ ;$$

$$(b) \quad 3x^5 - x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0\ .$$

CAPITULO V

ECUACIONES CUBICAS Y CUARTICAS

1. **¿Qué es la "resolución" de una ecuación?.** — El principal problema del álgebra consiste en la « resolución » de ecuaciones algebraicas, y es importante entender claramente qué quiere indicarse con ello. Resolver una ecuación involucra la determinación de todas sus raíces, tanto reales como imaginarias, ya sea en forma exacta o con una cierta aproximación previamente especificada. Naturalmente la dificultad en la resolución de ecuaciones aumenta con su grado, aparte de otras razones, porque cuanto mayor es éste, más raíces hay que hallar. Para las ecuaciones de primer grado

$$ax + b = 0,$$

la solución está dada por la fórmula

$$x = -\frac{b}{a},$$

que indica qué operaciones aritméticas deben realizarse con los coeficientes arbitrarios para hallar la raíz exacta o con un cierto grado de aproximación. La solución de las ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

está dada por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a},$$

que indica claramente la naturaleza de las operaciones a realizar con los coeficientes arbitrarios para obtener el valor de las raíces con la aproximación deseada o exactamente. Al examinar la fórmula vemos que para calcular las raíces de la ecuación cuadrática, además de las operaciones racionales, es necesario extraer la raíz cuadrada de un número dado. La extracción de la raíz cuadrada nos conduce nuevamente a la solución de una ecuación cuadrática pero del tipo especial siguiente:

$$x^2 = A,$$

de modo que la solución de una ecuación general de segundo grado por la fórmula anterior es, en realidad, una reducción del problema original a otro similar más simple. Para resolver este problema más simple de extraer la raíz cuadrada exacta o aproximada, hay métodos no más difíciles en su aplicación que la multiplicación y la división. Esto nos lleva a tratar a los radicales cuadráticos $\sqrt{A}$ como algo familiar y conocido. Existen también métodos para la extracción de raíces cúbicas de números reales, es decir, para resolver las ecuaciones cúbicas especiales de la forma

$$x^3 = A\,.$$

Este hecho induce a considerar los radicales $\sqrt[3]{A}$ también como algo familiar y conocido. Más generalmente, las raíces de las ecuaciones del tipo

$$x^n = A\,,$$

donde A es un número real, pueden hallarse aproximadamente usando, por ejemplo, las tablas de logaritmos. Aún en el caso de que A sea un número complejo, los valores de su raíz enésima $\sqrt[n]{A}$, como vimos en el Cap. I, pueden hallarse aproximadamente por medio de las tablas logarítmicas de números y funciones trigonométricas. De este modo, podemos considerar los radicales $\sqrt[n]{A}$ como cantidades familiares, fácilmente computables. La resolución de una ecuación mediante una combinación de operaciones racionales y extracción de raíces se llama *resolución algebraica* o *por radicales*. Así, por ejemplo, la ecuación

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0\,,$$

puede resolverse algebraicamente, y sus raíces, presentadas en forma de radicales, son:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\;;\quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\,.$$

Una ecuación cuadrática puede ser resuelta algebraicamente cualesquiera sean los valores que se atribuyan a sus coeficientes. Pero, ¿qué sucede con las ecuaciones cúbicas, cuárticas y de grado superior? ¿Pueden ser resueltas algebraicamente para valores arbitrarios de sus coeficientes? En lo que se refiere a las ecuaciones cúbicas y cuárticas, los matemáticos italianos (Scipio Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari) demostraron, en la primera mitad del siglo dieciséis, que pueden resolverse algebraicamente y sus raíces ser presentadas en forma de radicales para valores arbitrarios de los coeficientes. Pero todas las tentativas realizadas durante los dos siglos siguientes para hallar una solución algebraica de

ecuaciones «generales» (es decir, con coeficientes cualesquiera) de grado superior al cuarto, fracasaron. La causa de este fracaso reside en la naturaleza misma del problema y no se debió a la despreocupación o falta de ingenio de los que se ocuparon de él. A principios del siglo diecinueve, primeramente Ruffini (cuya demostración no fué completa) y luego Abel, demostraron que es absolutamente imposible expresar, por medio de una fórmula en la que sólo intervengan operaciones racionales y radicales, las raíces de una ecuación de grado superior al cuarto cuando los coeficientes son arbitrarios. La demostración de esta imposibilidad pertenece al álgebra superior y no puede ser encarada en este curso. Con respecto a la resolución algebraica de las ecuaciones cúbicas y cuárticas, la teoría es relativamente simple y será explicada en este capítulo y resumida nuevamente desde un punto de vista superior en el Capítulo XII.

2. **Fórmulas de Cardano.** — No se pierde generalidad al tomar la ecuación cúbica general en la forma:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,,$$

puesto que la división por el coeficiente de x^3 no modifica las raíces de la ecuación. Introduciendo una nueva incógnita, esta ecuación puede simplificarse, además, de modo que no contenga la segunda potencia de la incógnita. Con este fin hacemos:

$$x = y + k\,,$$

siendo k arbitrario. Por la fórmula de Taylor:

$$f(y+k) = f(k) + f'(k)\,y + \frac{f''(k)}{2}\,y^2 + \frac{f'''(k)}{6}\,y^3$$

y

$$f(k) = k^3 + ak^2 + bk + c \quad ; \quad f'(k) = 3\,k^2 + 2\,ak + b \quad ;$$

$$\frac{1}{2}f''(k) = 3\,k + a \quad ; \quad \frac{1}{6}f'''(k) = 1\,.$$

Para eliminar el término en y^2 basta elegir k de modo que:

$$3\,k + a = 0 \quad \text{ó} \quad k = -\frac{a}{3}\cdot$$

Por ser

$$f'\left(-\frac{a}{3}\right) = b - \frac{a^2}{3} \quad ; \quad f\left(-\frac{a}{3}\right) = c - \frac{ba}{3} + \frac{2\,a^3}{27}\,,$$

se deduce que, sustituyendo:

$$x = y - \frac{a}{3},$$

la ecuación propuesta queda transformada en

$$y^3 + py + q = 0, \tag{1}$$

donde

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad ; \quad q = c - \frac{ba}{3} + \frac{2\,a^3}{27}.$$

Una ecuación cúbica de la forma [1] puede resolverse por medio del siguiente artificio: Tratamos de satisfacerla haciendo:

$$y = u + v,$$

introduciendo así dos incógnitas u y v. Sustituyendo esta expresión en [1] y ordenando los términos de manera apropiada, u y v tienen que satisfacer la ecuación

$$u^3 + v^3 + (p + 3\,uv)\,(u + v) + q = 0, \tag{2}$$

con dos incógnitas. Este problema es indeterminado a menos que se tome otra relación entre u y v. Tomamos para ello la relación

$$3\,uv + p = 0,$$

o sea

$$uv = -\frac{p}{3}.$$

Entonces, se deduce de [2] que:

$$u^3 + v^3 = -q,$$

de modo que la solución de la ecuación cúbica [1] puede obtenerse resolviendo el sistema de dos ecuaciones

$$u^3 + v^3 = -q \quad ; \quad uv = -\frac{p}{3}. \tag{3}$$

Elevando al cubo esta última ecuación, tenemos:

$$u^3\,v^3 = -\frac{p^3}{27}, \tag{4}$$

y de este modo, por las ecuaciones [3] y [4], conocemos la suma y el producto de las dos incógnitas u^3 y v^3. Estas cantidades son las raíces de la ecuación cuadrática

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Llamándolas A y B, tenemos que:

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

$$B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

en las que estamos en libertad de elegir la raíz cuadrada. Ahora bien, debido a la simetría entre los términos u^3 y v^3 en el sistema [3] podemos hacer:

$$u^3 = A \quad ; \quad v^3 = B.$$

Si un valor determinado de la raíz cúbica de A se designa por $\sqrt[3]{A}$, los tres valores posibles de u serán:

$$u = \sqrt[3]{A} \quad ; \quad u = \omega\sqrt[3]{A} \quad ; \quad u = \omega^2\sqrt[3]{A},$$

donde

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

es una raíz cúbica imaginaria de la unidad. Con respecto a v tendremos también tres valores:

$$v = \sqrt[3]{B} \quad ; \quad v = \omega\sqrt[3]{B} \quad ; \quad v = \omega^2\sqrt[3]{B} \quad ;$$

pero no podemos combinar uno cualquiera de ellos con los tres valores posibles de u, desde que u y v deben satisfacer la relación:

$$uv = -\frac{p}{3}.$$

Si $\sqrt[3]{B}$ significa la raíz cúbica de B que satisface la relación

$$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3},$$

entonces los valores de v que pueden combinarse con

$$u = \sqrt[3]{A} \quad ; \quad u = \omega\sqrt[3]{A} \quad ; \quad u = \omega^2\sqrt[3]{A},$$

serán

$$v = \sqrt[3]{B} \quad ; \quad v = \omega^2\sqrt[3]{B} \quad ; \quad v = \omega\sqrt[3]{B}.$$

Por lo tanto, la ecuación [1] tendrá las siguientes raíces:

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

$$y_2 = \omega \sqrt[3]{A} + \omega^2 \sqrt[3]{B},$$

$$y_3 = \omega^2 \sqrt[3]{A} + \omega \sqrt[3]{B}.$$

Estas fórmulas se conocen como fórmulas de Cardano, en homenaje al matemático italiano Cardano (1501-1576), que fué el primero en publicarlas. Debe recordarse que $\sqrt[3]{A}$ puede tomarse arbitrariamente entre las tres posibles raíces de A, pero $\sqrt[3]{B}$ debe elegirse de modo que

$$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}.$$

3. **Discusión de la solución.** — Al discutir las fórmulas de Cardano supusimos que p y q son números reales. Demostraremos entonces, que la naturaleza de las raíces depende de la función

$$\Delta = 4\,p^3 + 27\,q^2.$$

Evidentemente, Δ será positivo, cero o negativo. Suponiendo primero que Δ sea positivo, la raíz cuadrada

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{\Delta}{108}},$$

será real y la tomaremos positiva. Entonces A y B serán reales y por $\sqrt[3]{A}$ indicamos la raíz cúbica real de A. Por ser p real y

$$\sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3},$$

$\sqrt[3]{B}$ será la raíz cúbica real de B. Por lo tanto, la ecuación [1] tiene una raíz real

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

pero las otras dos raíces

$$y_2 = \omega \sqrt[3]{A} + \omega^2 \sqrt[3]{B} = -\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{2},$$

$$y_3 = \omega^2 \sqrt[3]{A} + \omega \sqrt[3]{B} = -\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{2},$$

serán imaginarias conjugadas desde que A y B no son iguales y en consecuencia

$$\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\neq 0.$$

Ejemplo 1. Sea la ecuación cúbica

$$x^3+x^2-2=0.$$

Primeramente debe ser transformada por medio de la sustitución

$$x=y-\frac{1}{3}\cdot$$

La ecuación resultante en y (que puede hallarse por la regla de Ruffini) es:

$$y^3-\frac{1}{3}y-\frac{52}{27}=0,$$

de modo que:

$$p=-\frac{1}{3}\quad;\quad q=-\frac{52}{27}\quad;\quad \Delta=\frac{52^2}{27}-\frac{4}{27}=100.$$

En consecuencia será:

$$\sqrt{\frac{\Delta}{108}}=\frac{5}{\sqrt{27}}\quad;\quad A=\frac{26}{27}+\frac{5\sqrt{27}}{27}\quad;\quad B=\frac{26}{27}-\frac{5\sqrt{27}}{27}$$

$$\sqrt[3]{A}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\quad;\quad \sqrt[3]{B}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$$

e

$$y_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right);$$

$$y_2=-\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right)+\frac{i\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right);$$

$$y_3=-\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right)-\frac{i\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right).$$

Correspondientemente, las raíces de la ecuación propuesta son:

$$x_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}-1\right);$$

$$x_2 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + 2\right) + \\ + \frac{i\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right);$$

$$x_3 = -\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + 2\right) - \\ - \frac{i\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\right).$$

La ecuación

$$x^3 + x^2 - 2 = 0.$$

tiene, sin embargo, una raíz entera 1 y las dos raíces restantes

$$-1 \pm i,$$

son imaginarias.

Comparando con las expresiones obtenidas de las fórmulas de Cardano descubrimos el curioso hecho de que

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = 4,$$

a pesar de que las raíces cúbicas son números irracionales. La explicación de esto se halla comparando las raíces imaginarias. Esta comparación da para la diferencia de las mismas raíces cúbicas

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

en consecuencia:

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

Por lo tanto: $26 + 15\sqrt{3}$ y $26 - 15\sqrt{3}$ son los cubos de los números $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$. Tal simplificación ocurre siempre que la ecuación cúbica tenga una raíz racional, pero no en los demás casos.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x^3 + 9x - 2 = 0.$$

Aquí la transformación preliminar no es necesaria y las fórmulas de Cardano pueden aplicarse directamente. Tenemos:

$$p = 9 \quad ; \quad q = -2 \quad ; \quad \Delta = 3024 \quad ; \quad \frac{\Delta}{108} = 28$$

$$A = 1 + \sqrt{28} \quad ; \quad B = 1 - \sqrt{28}.$$

En consecuencia, la raíz real es:

$$\sqrt[3]{\sqrt{28}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{28}-1},$$

mientras que las raíces imaginarias son:

$$-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}\right)\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{28}+1}+\sqrt[3]{\sqrt{28}-1}\right).$$

Para calcular estas raíces aproximadamente, puede utilizarse alguno de los conocidos manuales que contienen tablas de cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas. En estas tablas se halla que:

$$\sqrt{28}+1 = 6{,}2915026 \quad ; \quad \sqrt{28}-1 = 4{,}2915026$$

y que:

$$\sqrt[3]{\sqrt{28}+1} = 1{,}8460840 \quad ; \quad \sqrt[3]{\sqrt{28}-1} = 1{,}6250615 .$$

Por consiguiente, la raíz real de la ecuación propuesta es aproximadamente:

$$1{,}8460840 - 1{,}6250615 = 0{,}2210225 ,$$

con el grado de aproximación permitido por las tablas de siete decimales.

En caso de que $\Delta = 0$

$$A = B = -\frac{q}{2},$$

y las raíces de la ecuación

$$y^3 + py + q = 0 ,$$

son:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \quad ; \quad y_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad ; \quad y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} .$$

En consecuencia, $y_2 = y_3$ es una raíz doble a menos que $q = 0$, lo que implica que $p = 0$, en cuyo caso las tres raíces son iguales a cero y la ecuación

$$y^3 = 0 ,$$

se resuelve directamente.

Problemas

Resolver las ecuaciones cúbicas:

1. $x^3 - 6x - 6 = 0.$

2. $x^3 - 12x - 34 = 0.$

3. $x^3 + 9x - 6 = 0.$

4. $x^3 + 18x - 6 = 0.$

5. $2x^3 + 6x + 3 = 0.$

6. $2x^3 - 3x + 5 = 0.$

7. $3x^3 - 6x^2 - 2 = 0.$

8. $x^3 + 6x^2 - 36 = 0.$

9. $x^3 + 3x^2 + 9x + 14 = 0.$

10. $x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0.$

11. $x^3 - 15x^2 + 105x - 245 = 0.$

12. $8x^3 + 12x^2 + 102x - 47 = 0.$

13. $x^3 - 2x + 2 = 0.$

14. $x^3 + 3x - 2 = 0.$

15. $x^3 + 6x^2 + 9x + 8 = 0.$

16. $8x^3 + 12x^2 + 30x - 3 = 0.$

Demostrar que:

17. $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

18. $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=2$.

19. $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=2$.

20. $\sqrt[3]{\sqrt{243}+\sqrt{242}}-\sqrt[3]{\sqrt{243}-\sqrt{242}}=2\sqrt{2}$.

21. ¿Cuál es el radio exterior de un casquete esférico de un centímetro de espesor si el volumen del casquete es igual al volumen del espacio hueco interior?

22. Resolver el Problema 21 si el volumen del espacio hueco es el doble del volumen del casquete.

23. Una caja sin tapa tiene la forma de un cubo de arista 10 cm. Si la capacidad de la caja es de 500 cm^3, ¿cuál es el espesor de las paredes? Se suponen de espesor uniforme.

4. **Caso irreducible.** — Volvemos a la discusión de la solución general para considerar qué sucede cuando $\Delta < 0$. Ocurre, en este caso, un fenómero curioso:

$$\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = i\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$$

es un imaginario puro y los números

$$A = -\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{-\Delta}{108}} \quad ; \quad B = -\frac{q}{2}-i\sqrt{\frac{-\Delta}{108}},$$

son complejos, de modo que las raíces de la ecuación [1] del Párrafo 2 están expresadas por las raíces cúbicas de números complejos, y sin embargo las tres son reales. Para ver esto, sea

$$\sqrt[3]{A} = a+bi,$$

una de las raíces cúbicas de A. Por ser B conjugado de A, el número $a-bi$ será una de las raíces cúbicas de B y debe tomarse igual a $\sqrt[3]{B}$ para satisfacer la condición

$$\sqrt[3]{A}\,.\,\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3}.$$

Así:

$$\sqrt[3]{A} = a+bi \quad ; \quad \sqrt[3]{B} = a-bi,$$

y de las fórmulas de Cardano se deduce que las raíces

$$y_1 = 2a$$
$$y_2 = (a+bi)\,\omega + (a-bi)\,\omega^2 = -a-b\sqrt{3},$$
$$y_3 = (a+bi)\,\omega^2 + (a-bi)\,\omega = -a+b\sqrt{3},$$

son reales y además, distintas. Es evidente que $y_2 \neq y_3$. Si $y_1 = y_2$ tendríamos

$$b = -a\sqrt{3},$$

de modo que:

$$\sqrt[3]{A} = a\,(1 - i\sqrt{3}).$$

Pero entonces

$$A = a^3\,(1 - i\sqrt{3})^3 = -8\,a^3.$$

sería real, lo que no es cierto. En la misma forma se demuestra que $y_1 \neq y_3$.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$y^3 - 3\,y + 1 = 0\,.$$

En este caso

$$p = -3 \quad ; \quad q = 1 \quad ; \quad \Delta = -81 \quad ; \quad \sqrt{\frac{-\Delta}{108}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega \quad ; \quad B = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2\,,$$

y las raíces reales se presentan en la forma:

$$y_1 = \sqrt[3]{\omega} + \sqrt[3]{\omega^2}$$

$$y_2 = \omega\,\sqrt[3]{\omega} + \omega^2\sqrt[3]{\omega^2}$$

$$y_3 = \omega^2\sqrt[3]{\omega} + \omega\,\sqrt[3]{\omega^2}\,.$$

Estas expresiones no pueden ser calculadas directamente debido a las raíces cúbicas de los números imaginarios. Si tratamos de hallar

$$\sqrt[3]{\omega} = a + bi\,,$$

algebraicamente, tenemos que resolver el sistema formado por las ecuaciones

$$a^3 - 3\,ab^2 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad 3\,a^2 b - b^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Despejando b^2 en la primera

$$b^2 = \frac{2\,a^3 + 1}{6\,a}$$

y sustituyendo este valor en la segunda

$$b\left(3\,a^2 - \frac{2\,a^3 + 1}{6\,a}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

de donde

$$b = \frac{3\sqrt{3a}}{16a^3 - 1} \quad ; \quad b^2 = \frac{27a^2}{(16a^3 - 1)^2} .$$

Igualando las dos expresiones de b^2, tenemos la ecuación

$$\frac{2a^3 + 1}{6a} = \frac{27a^2}{(16a^3 - 1)^2}$$

que efectuando operaciones, nos da:

$$(2a)^9 + 3(2a)^6 - 24(2a)^3 + 1 = 0 .$$

Haciendo $x = 8a^3$, tenemos una ecuación cúbica en x

$$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$$

que, sustituyendo $x = y - 1$, se transforma en

$$y^3 - 27y - 27 = 0$$

o, haciendo $y = -3z$, resulta:

$$z^3 - 3z + 1 = 0 .$$

Pero ésta es la misma ecuación que queríamos resolver. En consecuencia, no hemos avanzado un solo paso en el intento de hallar a y b por un procedimiento algebraico. El hecho de que las raíces de una ecuación cúbica

$$y^3 + py + q = 0 ,$$

en el caso de que

$$4p^3 + 27q^2 < 0 ,$$

se presentaran en una forma que incluyera raíces cúbicas de números inmaigarios desorientó a los matemáticos antiguos por largo tiempo, y este caso fué llamado por ellos *casus irreducibilis*, caso irreducible. Ahora sabemos que, por ejemplo, cuando p y q son números racionales, pero entre las tres raíces reales de una ecuación

$$y^3 + py + q = 0 ,$$

ninguna es racional, es absolutamente imposible expresar alguna de estas raíces en una forma que sólo incluva radicales de cualquier clase.

5. **Resolución trigonométrica.** — No obstante las dificultades algebraicas que se presentan en el caso irreducible, es posible expresar las raíces en una forma conveniente para el cálculo numérico, extrayendo la raíz cúbica de

$$A = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} ,$$

trigonométricamente. El cuadrado del módulo de A es:

$$\rho^2 = \left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \frac{p^3}{27} = \left(\frac{-p}{3}\right)^3 ,$$

en consecuencia

$$\rho = \left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} = \frac{-p\sqrt{-p}}{\sqrt{27}}.$$

El argumento de A puede determinarse, ya por su coseno

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{27}\,q}{2p\sqrt{-p}},$$

o ya por su tangente

$$\operatorname{tang}\phi = \frac{-\sqrt{-\Delta}}{q\sqrt{27}},$$

a condición de que ϕ se tome en el primero o en el segundo cuadrante según que q sea negativo o positivo. Hallados ρ y ϕ podemos tomar

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\phi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\phi}{3}\right) = \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(\cos\frac{\phi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\phi}{3}\right)$$

y

$$\sqrt[3]{B} = \frac{-p}{3}\left(\cos\frac{\phi}{3} - i\operatorname{sen}\frac{\phi}{3}\right).$$

Entonces, puesto que

$$\omega = \cos 120^\circ + i\operatorname{sen} 120^\circ,$$

las raíces y_1, y_2, y_3 estarán dadas por:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\phi}{3},$$

$$y_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} + 120^\circ\right),$$

$$y_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3} + 240^\circ\right).$$

En la práctica es más conveniente expresar y_2 e y_3 en la forma:

$$y_2 = -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(60^\circ - \frac{\phi}{3}\right),$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(60^\circ + \frac{\phi}{3}\right).$$

Ejemplo 1. Para la ecuación

$$y^3 - 3y + 1 = 0,$$

tenemos:

$$\sqrt{\frac{-p}{3}} = 1 \quad ; \quad \cos\phi = -\frac{1}{2},$$

luego: $\phi = 120°$, e

$$y_1 = 2\cos 40° \quad ; \quad y_2 = -2\cos 20° \quad ; \quad y_3 = 2\cos 80° .$$

Los valores aproximados de las raíces pueden sacarse directamente de las tablas trigonométricas, y son:

$$y_1 = 1{,}5320888862$$

$$y_2 = -1{,}8793852416$$

$$y_3 = 0{,}3472963554 .$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$y^3 - 7y - 7 = 0 .$$

Para esta ecuación

$$p = -7 \quad ; \quad q = -7 \quad ; \quad -\Delta = 49 ,$$

y

$$\operatorname{tang}\phi = \frac{1}{\sqrt{27}} \cdot$$

El cómputo siguiente se hizo con tablas de logaritmos de seis decimales. Los cálculos y resultados pueden presentarse como sigue:

$$\log 27 = 1{,}431364$$
$$\log\sqrt{27} = 0{,}715682$$
$$\log \operatorname{tang}\phi = 9{,}284318$$
$$\phi = 10°\,53'\,36'',2$$
$$\frac{1}{3}\phi = 3°\,37'\,52'',0$$

$$\log 7 = 0{,}845098$$
$$\underline{\log 3 = 0{,}477121}$$
$$\log 7/3 = 0{,}367977$$
$$\log\sqrt{7/3} = 0{,}183988$$
$$\underline{\log 2 = 0{,}301030}$$
$$\log 2\sqrt{7/3} = 0{,}485018$$

$$\log\cos\frac{\phi}{3} = 9{,}999128-10$$
$$\underline{0{,}485018}$$
$$\log y_1 = 0{,}484146$$
$$\underline{y_1 = 3{,}04892}$$

$$\log\cos\left(60° + \frac{\phi}{3}\right) = 9{,}647528-10$$
$$\underline{0{,}485018}$$
$$\log(-y_2) = 0{,}132546$$
$$\underline{-y_2 = 1{,}35689}$$

$$\log\cos\left(60° - \frac{\phi}{3}\right) = 9{,}743387-10$$
$$\underline{0{,}485018}$$
$$\log(-y_3) = 0{,}228405$$
$$\underline{-y_3 = 1{,}69202}$$

$$y_1 = 3{,}04892$$
$$y_2 = -1{,}35689$$
$$\underline{y_3 = -1{,}69202}$$
$$0{,}00001$$

Las raíces han sido calculadas independientemente y la suma de sus valores aproximados resulta ser 0,00001 en lugar de cero, lo que sirve como control para demostrar que los valores hallados son correctos dentro de los límites de aproximación que pueden obtenerse con tablas de seis decimales.

Problemas

Resolver trigonométricamente

1. $x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$

2. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0.$

3. $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$

4. $x^3 - 6x + 2 = 0.$

5. $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = 0.$

6. $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$

7. $x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0.$

8. $x^3 + 6x^2 + 8x - 1 = 0.$

9. Cortar un sólido semiesférico con un plano paralelo a la base de modo tal que lo divida en dos partes de igual volumen.

10. Si se pide que el mismo sólido se divida en tres partes de igual volumen por medio de dos planos paralelos a su base, demostrar cómo pueden elegirse estos planos.

11. Siendo el peso específico del corcho de 0,25, ¿hasta qué profundidad se sumergirá en el agua una esfera de corcho de 10 cm de radio?

Por el principio de Arquimedes el corcho desalojará un volumen de agua de igual peso que el corcho.

12. Resolver la ecuación

$$(x^2 - x + 1)^3 = 9x^2(x - 1)^2$$

Hágase: $y = x - \frac{1}{2}\cdot$

13. Resolver la ecuación

$$(x^2 - x + 1)^3 = 8x(x - 1).$$

6. Solución de las ecuaciones cuárticas.

— La resolución de las ecuaciones cuárticas fué descubierta por Ferrari, discípulo de Cardano. Escribiendo la ecuación

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

en la forma

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d,$$

y sumando $\frac{a^2}{4}x^2$ a ambos miembros, la ecuación

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - x - d, \qquad [1]$$

es equivalente a la ecuación original. Si el segundo miembro de [1] fuera un cuadrado perfecto, la solución de esta ecuación sería inmediata.

Pero, en general, no lo es. La idea fundamental en el método de Ferrari consiste en sumar a ambos miembros de [1]

$$y\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right) + \frac{y^2}{4},$$

de modo de obtener un cuadrado perfecto en el primer miembro para un y indeterminado. La ecuación [1] queda transformada en:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \\ + \left(-c + \frac{1}{2}ay\right)x + \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right). \qquad [2]$$

Ahora podemos tratar de determinar y de modo que:

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(-c + \frac{1}{2}ay\right)x + \left(-d + \frac{1}{4}y^2\right) \qquad [3]$$

se convierta en el cuadrado de una expresión lineal $ex + f$. En general, si:

$$Ax^2 + Bx + C = (ex + f)^2, \qquad [4]$$

será

$$B^2 - 4AC = 0, \qquad [5]$$

y recíprocamente. De hecho, la ecuación [4] es equivalente a las tres relaciones

$$A = e^2 \quad ; \quad B = 2ef \quad ; \quad C = f^2, \qquad [6]$$

para que [5] se satisfaga. Recíprocamente, suponemos que [5] sea verdadera. Entonces, si $A = 0$ y $C = 0$, tendremos también $B = 0$, y las relaciones [6] se satisfarán para $e = f = 0$. Si A ó C no son cero, sea, por ejemplo, $A \neq 0$, tomamos, entonces:

$$e = \sqrt{A} \quad ; \quad f = \frac{B}{2e},$$

y, por [5], tendremos:

$$C = f^2.$$

De modo que el segundo miembro de [3] será el cuadrado de una expresión lineal $ex + f$ si y satisface la ecuación:

$$\left(\frac{1}{2}ay - c\right)^2 = 4\left(y + \frac{a^2}{4} - b\right)\left(\frac{1}{4}y^2 - d\right),$$

o, efectuando operaciones:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0. \qquad [7]$$

Basta tomar para y una raíz cualquiera de esta ecuación cúbica, llamada *resolvente* de la ecuación cuártica, para tener

$$\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}ay - c\right)x + \frac{1}{4}y^2 - d = (ex + f)^2$$

con e y f convenientemente elegidos. La ecuación cuártica queda, entonces, de la forma:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 = (ex + f)^2,$$

podemos dividirla en dos ecuaciones cuadráticas

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y = ex + f \quad ; \quad x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y = -ex - f,$$

las que resueltas separadamente, nos dan las cuatro raíces buscadas. La solución se simplifica si la resolvente [7] tiene una raíz expresable racionalmente en función de a, b, c, d. En ese caso puede elegirse esta raíz para y, y las raíces de la ecuación cuártica pueden expresarse por medio de radicales cuadráticos. Pero en general, la expresión de las raíces tendrá radicales cuadráticos y cúbicos.

Ejemplo 1. Apliquemos este método a la ecuación

$$x^4 + 4x - 1 = 0.$$

En este caso serán

$$a = 0 \ ; \ b = 0 \ ; \ c = 4 \ ; \ d = -1$$

y la resolvente cúbica correspondiente será:

$$y^3 + 4y - 16 = 0,$$

que tiene una raíz racional 2. Haciendo $y = 2$, la expresión (3) queda:

$$2x^2 - 4x + 2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2$$

y se llega a la solución resolviendo las dos ecuaciones cuadráticas

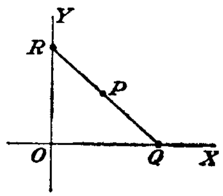
$$x^2 + 1 = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \ ; \ x^2 + 1 = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}.$$

Las cuatro raíces de la ecuación propuesta son:

$$\frac{1 \pm i\sqrt{\sqrt{8}+1}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{-1 \pm \sqrt{\sqrt{8}-1}}{\sqrt{2}}.$$

Ejemplo 2. Como segundo ejemplo tomamos el siguiente problema geométrico: Por un punto P sobre la bisectriz del ángulo formado por 2 rectas perpendiculares OX y OY trazar una recta de modo que el segmento QR entre OX y OY tenga una longitud dada.

Considerando OX y OY como ejes coordenados, sean $(-a;\ a)$ las coordenadas de P. Llamemos $OQ = x$ y $OR = y$. La ecuación de la recta que determina en OX la abscisa x y en OY la ordenada y es:



$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1.$$

La condición de que esta recta pase por el punto P $(a;\ a)$ nos da una relación entre x e y:

$$\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = 1.$$

Por otra parte, si l es la longitud dada de QR, la segunda relación:

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

nos la suministra el teorema de Pitágoras. Sustituyendo en esta última ecuación el valor

$$y = \frac{ax}{x - a},$$

que resulta de la primera relación, tenemos que determinar x de la ecuación

$$x^2 + \frac{a^2 x^2}{(x - a)^2} = l^2$$

$$x^4 - 2\,ax^3 + (2\,a^2 - l^2)\,x^2 + 2\,al^2\,x - a^2\,l^2 = 0.$$

El problema queda así reducido a la resolución de esta ecuación cuártica. Su resolvente cúbica es:

$$y^3 + (l^2 - 2\,a^2)\,y^2 - 4\,a^4\,l^2 = (y - 2\,a^2)\,(y^2 + ly + 2\,a^2\,l^2) = 0,$$

tiene una raíz $y = 2\,a^2$, y con este valor de y, la expresión (3) queda:

$$(a^2 + l^2)\,x^2 - 2\,a\,(a^2 + l^2)\,x + a^2 + l^2 = [\sqrt{l^2 + a^2}\,(x - a)]^2.$$

Nuestra ecuación de cuatro grado puede ahora dividirse en dos ecuaciones cuadráticas

$$x^2 - ax + a^2 = \sqrt{l^2 + a^2}\,(x - a),$$
$$x^2 - ax + a^2 = -\sqrt{l^2 + a^2}\,(x - a),$$

o sea:

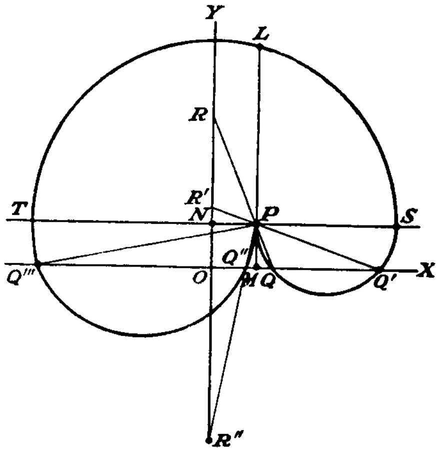
$$x^2 - (\sqrt{l^2 + a^2} + a)\,x + a\,(a + \sqrt{l^2 + a^2}) = 0,$$
$$x^2 + (\sqrt{l^2 + a^2} - a)\,x + a\,(a - \sqrt{l^2 + a^2}) = 0.$$

Las mismas ecuaciones determinan las abscisas de los puntos de intersección de dos círculos

$$\left(x - \frac{\sqrt{l^2 + a^2} + a}{2}\right)^2 + (y - a)^2 = \left(\frac{\sqrt{l^2 + a^2} - a}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{\sqrt{l^2 + a^2} - a}{2}\right)^2 + (y - a)^2 = \left(\frac{\sqrt{l^2 + a^2} + a}{2}\right)^2,$$

con la recta $y = 0$. En consecuencia, se desprende de allí la siguiente construcción: Por P se trazan dos rectas PM y PN paralelas a OY y OX respectivamente, de modo que $ON = PN = a$. En MP se toma el segmento $PL = l$ y, tomando N como centro, se describe un círculo de radio NL, que corta a PN en S y T. Con PS y PT como diámetros se describen círculos que cortan a OX en Q, Q' y Q'' respectivamente. Las rectas pedidas se obtienen uniendo P con Q, Q', Q'' y Q''', de modo que el problema puede tener cuatro soluciones; como mínimo tendrá dos. Los puntos Q'' y Q''' existen siempre, pero Q y Q' pueden no existir. Esto último sucede si el círculo de diámetro PS no corta al eje OX, es decir, si



$$\frac{\sqrt{l^2 + a^2} - a}{2} < a\,,$$

o sea si

$$l^2 < 8\,a^2.$$

Problemas

Resolver las siguientes ecuaciones cuárticas:

1. $x^4 - 8\,x^2 - 4\,x + 3 = 0.$

2. $x^4 - 4\,x^2 + x + 2 = 0.$

3. $x^4 + x^3 - 5\,x^2 + 2 = 0.$

4. $2\,x^4 + 5\,x^3 - 8\,x^2 - 17\,x - 6 = 0.$

5. $x^4 - 3\,x^2 + 6\,x - 2 = 0.$

6. $x^4 - x^2 - 2\,x - 1 = 0.$

7. $x^4 + 3\,x^3 - 2\,x^2 - 10\,x - 12 = 0.$

8. $x^4 + 5\,x^3 + x^2 - 13\,x + 6 = 0.$

9. $x^4 + 2\,x^2 + x + 2 = 0.$

10. $x^4 + 5\,x^2 + 2\,x + 8 = 0.$

11. $2\,x^4 + x^3 + 2\,x^2 - 3\,x - 2 = 0.$

12. $x^4 + x^3 + 5\,x^2 + 5\,x + 12 = 0.$

13. Demostrar que una ecuación recíproca

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$

puede resolverse por medio de radicales cuadráticos.

14. Demostrar que $x = 2\cos\left(\dfrac{2\,\pi}{15}\right)$ satisface la ecuación

$$x^4 - x^3 - 4\,x^2 + 4\,x + 1 = 0.$$

¿Cuáles son las otras raíces de esta ecuación?

15. Resolver la ecuación

$$[(x + 2)^2 + x^2]^3 = 8\,x^4\,(x + 2)^2$$

SUGESTIÓN: Hágase $x + 1 = y$.

CAPITULO VI

SEPARACION DE RAICES

1. **Objeto de este capítulo.** — En éste y en los dos capítulos siguientes trataremos con ecuaciones cuyos coeficientes son números dados. Tales ecuaciones se llaman numéricas para distinguirlas de las literales, cuyos coeficientes son letras capaces de representar cualquier número. Los métodos directos para la resolución de ecuaciones cúbicas y cuárticas fueron tratados en el capítulo precedente. No se dispone de tales métodos directos para ecuaciones de grados mayores, pero existen procedimientos indirectos para el cómputo de raíces de las ecuaciones numéricas que son igualmente aplicables a ecuaciones de cualquier grado. A menudo estos métodos indirectos son bastante más ventajosos aun en el caso de ecuaciones cúbicas y cuárticas, y su exposición constituye un capítulo muy importante del álgebra.

En lo que sigue consideraremos únicamente ecuaciones con coeficientes reales y concentraremos nuestra atención en las raíces reales. Con respecto a las raíces reales, el problema es *separarlas* o *aislarlas*. Una raíz real se aísla si se determina un intervalo que contiene a ésta y no a otras raíces. Las raíces reales quedarán separadas si cada una de ellas está incluída en uno de dichos intervalos. Así por ejemplo, las raíces de la ecuación

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

son todas reales y ubicadas en los siguientes intervalos, cada uno de los cuales contiene una raíz: $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(1; 2)$. Las raíces están, por lo tanto, separadas. Evidentemente la separación de las raíces reales requiere, en primer lugar, la solución de la siguiente cuestión fundamental: ¿Cuántas raíces reales tiene una ecuación propuesta? A su vez, esta pregunta quedará contestada si encontramos la solución de un problema más general: ¿Cuántas raíces reales de una ecuación dada están contenidas entre dos números dados? Trataremos principalmente estos problemas en este capítulo y el siguiente.

2. **Signo de un polinomio para valores pequeños y grandes de la variable.** — Considérese un polinomio

$$f(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n,$$

con coeficientes reales, y supóngase que x toma valores reales. Por simplicidad escribiremos: $|x| = r$. Entonces

$$|f(x)| \leqq |c_1| r + |c_2| r^2 + \ldots + |c_n| r^n,$$

y por consiguiente:

$$|f(x)| \leqq c(r + r^2 + \ldots + r^n),$$

siendo c el mayor de los números

$$|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|.$$

Supuesto que $r < 1$, tenemos

$$r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r} < \frac{r}{1 - r},$$

y así

$$|f(x)| < \frac{cr}{1 - r},$$

siempre que $r < 1$. Por otra parte, siendo ε un número positivo dado, la desigualdad

$$\frac{cr}{1 - r} < \varepsilon,$$

queda satisfecha si

$$r < \frac{\varepsilon}{c + \varepsilon} < 1.$$

Por lo tanto

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

siempre que

$$|x| < \frac{\varepsilon}{c + \varepsilon}.$$

En otras palabras, podemos establecer el siguiente resultado: El valor numérico del polinomio

$$c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

será menor que cualquier número positivo ε dado, para valores suficientemente pequeños de x. Es suficiente tomar

$$|x| < \frac{\varepsilon}{c + \varepsilon},$$

donde c es el mayor de los números

$$|c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|.$$

Esta proposición conduce a las siguientes conclusiones:

1. Para x suficientemente pequeño en valor absoluto, el signo del polinomio

$$\phi(x) = k_0 + k_1 x + \ldots + k_n x^n,$$

es el mismo que el de k_0 siempre que $k_0 \neq 0$. Podemos escribir

$$\phi(x) = k_0 (1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n)$$

donde

$$c_i = \frac{k_i}{k_0} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ahora, para x suficientemente pequeño

$$c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

será numéricamente menor que cualquier número dado, digamos $\frac{1}{2}$. Entonces, para tal x pequeño

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n,$$

será mayor que $\frac{1}{2}$ y por lo tanto positivo, y entonces $\phi(x)$ tendrá el mismo signo que k_0.

2. Si los coeficientes $a, b, c, \ldots$ no son todos nulos, el signo del polinomio

$$ax^m + bx^n + cx^p + \ldots$$

dispuesto según las potencias crecientes de x será, para x suficientemente pequeño, el mismo que el signo de su término de menor grado ax^m. En efecto:

$$ax^m + bx^n + cx^p + \ldots = ax^m\left(1 + \frac{b}{a}\, x^{n-m} + \frac{c}{a}\, x^{p-m} + \ldots\right),$$

y por la conclusión 1:

$$1 + \frac{b}{a} x^{n-m} + \frac{c}{a} x^{p-m} + \ldots$$

será positivo para un x suficientemente pequeño. Así, por ejemplo:

$$-2x^3 + 3x^5 - 100x^6.$$

para x pequeño será negativo o positivo según que x sea positivo o negativo.

3. El signo del polinomio

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

dispuesto según las potencias decrecientes de x, es el mismo que el de su término principal $a_0 x^n$ para valores de x suficientemente grandes. En efecto:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0} x^{-1} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} x^{-n}\right),$$

y para x suficientemente grande (o x^{-1} suficientemente pequeño).

$$1 + \frac{a_1}{a_0} x^{-1} + \ldots + \frac{a_n}{a_0} x^{-n},$$

es positivo. Luego, para x grande

$$-3x^4 + 100x^3 + 1000x - 100.000,$$

será negativo, mientras

$$x^5 - 1000x^4 + 20.000x^3 - 1.000.000,$$

será positivo o negativo según que x sea positivo o negativo.

3. **Teorema.** — *Si un polinomio real $f(x)$ toma valores $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos para $x = a$ y $x = b$, así por ejemplo: $f(a) < 0, f(b) > 0$, entonces hay por lo menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $(a; b)$.*

DEMOSTRACIÓN: Desde cierto punto de vista el teorema es intuitivo, pues si los puntos de la curva $y = f(x)$ correspondientes a $x = a$ y $x = b$ están en semiplanos opuestos respecto al eje OX, entonces la curva, siendo continua, debe cortar a OX en algún punto entre $x = a$ y $x = b$.

★ Un razonamiento más riguroso es el siguiente: En primer lugar, sin restringir su generalidad, puede suponerse que a y b son enteros; pues de otra manera, bastaría hacer una transformación lineal de la variable:

$$x = a + (b - a)t.$$

Entonces, $f(x)$ se transformará en otro polinomio real $\phi(x)$, y: $\phi(0) = f(a)$, $\phi(1) = f(b)$ serán números de signos opuestos. Si, por lo tanto, es cierto que $\phi(t) = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1, se seguirá inmediatamente que la ecuación original $f(x) = 0$ tiene una raíz entre entre a y b. Luego no restringe la generalidad suponer que a y b sean enteros. Entonces, entre los valores

$$f(a), \quad f(a+1), \ldots, f(b),$$

de los cuales el primero es negativo y el último positivo, habrá un último término no positivo, digamos $f(c_0)$, tal que

$$f(c_0) \leqq 0 \quad ; \quad f(c_0 + 1) > 0 .$$

En caso de que $f(c_0) = 0$ la ecuación tiene una raíz entera c_0 entre a y b y nada queda por demostrar. De lo contrario, divídase el intervalo $(c_0; c_0 + 1)$ en 10 partes iguales y considérense los números

$$f(c_0) \quad ; \quad f\left(c_0 + \frac{1}{10}\right) \quad ; \quad f\left(c_0 + \frac{2}{10}\right) ; \ldots ; f(c_0 + 1) ,$$

de los cuales el primero es negativo y el último positivo. Entre ellos estará el último no positivo; sea:

$$f\left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right) \quad ; \quad 0 \leqq c_1 \leqq 9 .$$

tal que

$$f\left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right) \leqq 0 \quad ; \quad f\left(c_0 + \frac{c_1 + 1}{10}\right) > 0 .$$

Si

$$f\left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right) = 0 ,$$

la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz racional $\left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right)$ entre a y b y no queda nada por demostrar. En caso contrario, divídase el intervalo entero

$$c_0 + \frac{c_1}{10} \quad \text{y} \quad c_0 + \frac{c_1 + 1}{10} ,$$

en diez partes iguales y considérense los números

$$f\left(c_0 + \frac{c_1}{10}\right) \quad ; \quad f\left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10^2}\right) ; \ldots ; f\left(c_0 + \frac{c_1 + 1}{10}\right) ,$$

entre los cuales se encontrará el último

$$f\left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}\right) \quad ; \quad 0 \leqq c_2 \leqq 9 ,$$

que no es positivo. Si

$$f\left(c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}\right) = 0 .$$

se habrá determinado una raíz racional

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2},$$

entre a y b. En caso contrario divídase nuevamente el intervalo entre

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} \quad \text{y} \quad c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2 + 1}{10^2},$$

en diez partes iguales y continúese como anteriormente. El proceso terminará si la ecuación tiene una raíz racional de la forma

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_m}{10^m},$$

representada por una fracción decimal finita entre a y b y de lo contrario puede continuarse indefinidamente, determinándose un decimal de infinitas cifras

$$\xi = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots$$

Por la forma en que se obtuvo este decimal es evidente que haciendo

$$\xi_m = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_m}{10^m},$$

$$\eta_m = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots + \frac{c_{m+1}}{10^m},$$

tendremos

$$f(\xi_m) < 0 \quad ; \quad f(\eta_m) > 0,$$

para $m = 1, 2, 3, \ldots$ Por otra parte, por la fórmula de Taylor

$$f(\xi_m) = f(\xi) + (\xi_m - \xi) f'(\xi) + \\ + (\xi_m - \xi)^2 \frac{f''(\xi)}{1.2} + (\xi_m - \xi)^3 \frac{f'''(\xi)}{1.2.3} + \ldots < 0,$$

$$f(\eta_m) = f(\xi) + (\eta_m - \xi) f'(\xi) + (\eta_m - \xi)^2 \frac{f''(\xi)}{1.2} + \ldots > 0,$$

y luego

$$f(\xi) < (\xi - \xi_m) f'(\xi) - (\xi - \xi_m)^2 \frac{f''(\xi)}{1.2} + \ldots \qquad [1]$$

$$f(\xi) > (\xi - \eta_m) f'(\xi) - (\xi - \eta_m)^2 \frac{f''(\xi)}{1.2} + \ldots \qquad [2]$$

Pero, de acuerdo con el resultado establecido en el Párrafo 2, el polinomio en h

$$hf'(\xi) - h^2 \frac{f''(\xi)}{1.2} + \ldots,$$

será numéricamente menor que un número positivo ε dado, siempre que el valor absoluto de h sea menor que un cierto número δ que puede ser calculado al conocerse el valor de ε. Considerando que las diferencias $(\xi - \xi_m)$ y $(\xi - \eta_m)$ son numéricamente menores que $\frac{1}{10^m}$ y tomando m tan grande como para hacer $\frac{1}{10^m} < \delta$ el segundo miembro de las desigualdades [1] y [2] será numéricamente menor que ε, es decir, mayor que $-\varepsilon$ y menor que ε.

En consecuencia:

$$f(\xi) < \varepsilon \quad \text{y} \quad f(\xi) > -\varepsilon,$$

por más pequeño que se tome ε, lo que implica $f(\xi) = 0$. Así, queda demostrado que el número

$$\xi = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots,$$

que ciertamente pertenece al intervalo $(a; b)$ es una raíz de la ecuación $f(\xi) = 0$.

Téngase en cuenta que esta demostración da también el procedimiento para computar aproximadamente, y con cualquier grado de aproximación, la raíz cuya existencia queda establecida ★.

El teorema que se acaba de demostrar es solamente un caso particular de uno más general concerniente a las funciones continuas: *Si una función continua en un intervalo $a \leqq x \leqq b$ toma valores de signos opuestos en sus extremos, se anula en algún punto interior del intervalo.* Nos referiremos ocasionalmente a esta propiedad general de las funciones continuas, cuya demostración es muy similar a la desarrollada para los polinomios.

4. **Corolarios.** — Entre las consecuencias inmediatas del teorema del Párrafo 3 están las siguientes:

1. Una ecuación real

$$f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n+1} = 0,$$

de grado impar, tiene por lo menos una raíz real. Esto es evidente en el caso en que $a_{2n+1} = 0$; pues entonces $x = 0$ es una raíz. Cuando a_{2n+1} no es nulo, será positivo o negativo. Ahora, sin restringir la genera-

lidad, el coeficiente a_0 puede suponerse positivo. Entonces, para valores suficientemente grandes c (Párrafo 2, conclusión 3) $f(c)$ será positivo y $f(-c)$ negativo. Suponiendo $a_{2n+1} < 0$ tenemos:

$$f(0) < 0 \quad ; \quad f(c) > 0\,,$$

y hay una raíz positiva de la ecuación $f(x) = 0$. Si $a_{2n+1} > 0$, entonces:

$$f(-c) < 0 \quad ; \quad f(0) > 0\,,$$

y en este caso la ecuación tiene una raíz negativa.

2. Una ecuación

$$f(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n} = 0\,,$$

de grado par, en la que el coeficiente principal a_0 y el término independiente a_{2n} tienen signos opuestos, tiene por lo menos dos raíces reales, una positiva y otra negativa. Suponiendo $a_0 > 0$ y c suficientemente grande, $f(c)$ y $f(-c)$ serán ambos positivos; entonces, desde que

$$f(-c) > 0 \quad ; \quad f(0) < 0 \quad ; \quad f(c) > 0\,.$$

cada uno de los intervalos $(-c; 0)$ y $(0; c)$ contiene por lo menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

3. Un polinomio real sin raíces reales en un intervalo $a \leqq x \leqq b$ conserva un signo constante en el mismo, es decir, $f(x)$ es positivo o negativo cualquiera sea el valor de x que se tome en el intervalo $(a; b)$. Sean x' y x'' dos valores cualesquiera tomados en $(a; b)$. Entonces, ni $f(x')$ ni $f(x'')$ son nulos, desde que el intervalo no contiene raíces de $f(x)$ y por lo tanto $f(x')$ y $f(x'')$ no pueden tener signos opuestos, pues de otra manera $f(x)$ tendría una raíz entre x' y x'' y pertenecería al intervalo $(a; b)$ lo que es contrario a la hipótesis.

4. El número de raíces de $f(x) = 0$ entre a y b, contadas de acuerdo a su multiplicidad, es impar o par, de acuerdo a que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos o iguales. Sean $c, d, \ldots, l$, distintas raíces, de $f(x)$ entre a y b, y $\gamma, \delta, \ldots, \lambda$, sus órdenes de multiplicidad. Entonces:

$$f(x) = (x - c)^{\gamma} (x - d)^{\delta} \ldots (x - l)^{\lambda} \phi(x)\,,$$

y $\phi(x)$ no tiene raíces entre a y b. Sustituyendo $x = b$ y $x = a$ y haciendo el cociente, tenemos:

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^{\gamma} \left(\frac{b-d}{a-d}\right)^{\delta} \cdots \left(\frac{b-l}{a-l}\right)^{\lambda} \frac{\phi(b)}{\phi(a)}\,.$$

Ahora, por el corolario 3, el cociente

$$\frac{\phi(b)}{\phi(a)},$$

es positivo, mientras que

$$\frac{b-c}{a-c}\ ;\ \frac{b-d}{a-d}\ ;\ \ldots\ ;\ \frac{b-l}{a-l},$$

son números negativos. El signo de $\dfrac{f(b)}{f(a)}$ es el mismo que el de

$$(-1)^{\gamma+\delta+\ldots+\lambda}$$

luego, $\gamma+\delta+\ldots+\lambda$ —número de raíces de $f(x)$ en $(a;b)$ contadas de acuerdo a su multiplicidad— es impar si $f(b)$ y $f(a)$ tienen signos opuestos, y par si $f(b)$ y $f(a)$ tienen el mismo signo.

5. **Ejemplos.** — Antes de considerar los ejemplos que tratan de ilustrar el uso de los resultados establecidos hasta aquí, es conveniente introducir ciertos símbolos y explicar su significado. Cuando escribimos $f(+\infty)=+\infty$ ó $f(+\infty)=-\infty$ queremos decir que para todos los valores positivos de x suficientemente grandes, el polinomio $f(x)$ conserva el signo $+$ ó $-$ y toma, en valor absoluto, valores mayores que cualquier número positivo dado. En la misma forma, los símbolos $f(-\infty)=+\infty$ ó $f(-\infty)=-\infty$ significan que para cualquier x negativo, suficientemente grande en valor absoluto, $f(x)$ conserva el signo $+$ ó $-$, sobrepasando numéricamente cualquier número positivo prefijado.

Ejemplo 1. Considérese la ecuación

$$f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+\lambda(x-2)(x-4)(x-6)=0$$

donde λ es un número real arbitrario. Al sustituir en $f(x)$ respectivamente $-\infty$; 2; 4; 6; $+\infty$ tenemos

Valores:	$f(-\infty)$	$f(2)$	$f(4)$	$f(6)$	$f(\infty)$
Signos:	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

De esto concluímos que la ecuación propuesta tiene raíces en cada uno de los intervalos

$$(-\infty;2)\quad(2;4)\quad(4;6)\quad(6;+\infty).$$

Como el grado de esta ecuación es 4, todas sus raíces son reales y simples. Llamándolas c, d, e, f vemos que

$$-\infty<c<2<d<4<e<6<f<+\infty.$$

En otras palabras, las raíces de las ecuaciones

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad (x-2)(x-4)(x-6) = 0$$

se siguen en un orden alternado o se separan mutuamente. En general, si dos ecuaciones tienen todas sus raíces reales y simples y están ubicadas de tal modo que entre dos consecutivas de una hay justamente una raíz de la otra, decimos que las raíces de una separan las de la otra. Evidentemente, en ese caso, los grados de las ecuaciones son iguales o bien difieren en una unidad.

Ejemplo 2. Considérese una ecuación de la forma

$$F(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} - P = 0,$$

en la cual A, B, C son números positivos; $a < b < c$; y P es un número cualquiera distinto de cero. Escribiendo

$$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

y

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

es obvio que las raíces de la ecuación en la forma original y las de $f(x) = 0$ son las mismas. Ahora, en $F(x)$ hágase la sustitución $x = a - \varepsilon$; $x = a + \varepsilon$; los resultados son

$$F(a-\varepsilon) = -\frac{A}{\varepsilon} + \frac{B}{a-b-\varepsilon} + \frac{C}{a-c-\varepsilon} - P,$$

$$F(a+\varepsilon) = \frac{A}{\varepsilon} + \frac{B}{a-b+\varepsilon} + \frac{C}{a-c+\varepsilon} - P.$$

Si ε es positivo y muy pequeño, los términos

$$-\frac{A}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad \frac{A}{\varepsilon}$$

sobrepasan a los otros en las expresiones precedentes y por lo tanto $F(a-\varepsilon) < 0$; $F(a+\varepsilon) > 0$ para un ε positivo pequeño. Del mismo modo encontramos que:

$$F(b-\varepsilon) < 0, \quad F(c-\varepsilon) < 0,$$

$$F(b+\varepsilon) > 0, \quad F(c+\varepsilon) > 0,$$

para ε positivo y pequeño; en otras palabras:

$$\frac{f(a-\varepsilon)}{g(a-\varepsilon)} < 0 \quad ; \quad \frac{f(b-\varepsilon)}{g(b-\varepsilon)} < 0 \quad ; \quad \frac{f(c-\varepsilon)}{g(c-\varepsilon)} < 0$$

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{g(a+\varepsilon)} > 0 \quad ; \quad \frac{f(b+\varepsilon)}{g(b+\varepsilon)} > 0 \quad ; \quad \frac{f(c+\varepsilon)}{g(c+\varepsilon)} > 0$$

para ε pequeño y positivo. Los signos de $g(a-\varepsilon)$, $g(a+\varepsilon)$, etc. son los siguientes:

$g(a-\varepsilon)$	$g(a+\varepsilon)$	$g(b-\varepsilon)$	$g(b+\varepsilon)$	$g(c-\varepsilon)$	$g(c+\varepsilon)$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

y consecuentemente los de: $f(a-\varepsilon)$, $f(a+\varepsilon)$, etc., son:

$f(a-\varepsilon)$	$f(a+\varepsilon)$	$f(b-\varepsilon)$	$f(b+\varepsilon)$	$f(c-\varepsilon)$	$f(c+\varepsilon)$
$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Aún más, desde que:

$$F(-\infty) = F(+\infty) = -P,$$

el signo de $f(+\infty)$ es negativo, en el caso de P positivo, y el signo de $f(-\infty)$ es negativo en el caso de P negativo. Luego, para $P > 0$

los signos de	$f(a+\varepsilon)$	$f(b-\varepsilon)$	$f(b+\varepsilon)$	$f(c-\varepsilon)$	$f(c+\varepsilon)$	$f(+\infty)$
son	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

mientras que para $P < 0$

los signos de	$f(-\infty)$	$f(a-\varepsilon)$	$f(a+\varepsilon)$	$f(b-\varepsilon)$	$f(b+\varepsilon)$	$f(c-\varepsilon)$
son	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

En el primer caso hay una raíz en cada uno de los intervalos

$$(a; b) \;;\; (b; c) \;;\; (c; +\infty)$$

y en el segundo caso, en cada uno de los intervalos

$$(-\infty; a) \;;\; (a; b) \;;\; (b; c).$$

Las raíces de la ecuación propuesta son, por lo tanto, reales, simples y separan a a, b, c.

Problemas

Verifíquese que las siguientes ecuaciones tienen raíces en los intervalos indicados

1. $x^3 - 7x + 7 = 0$. Raíces en $(-4; -3)$; $\left(1; \frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

2. $x^3 - 3x^2 - 4x + 13 = 0$. Raíces en $\left(1; \frac{8}{3}\right)$; $\left(\frac{8}{3}; 3\right)$; $(-3; -2)$.

3. $x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 14x - 4 = 0$. Raíces en $(-2; -1)$; $(0; 1)$; $\left(3; \frac{7}{2}\right)$; $\left(\frac{7}{2}; 4\right)$.

4. $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$. Raíces en $(-5; -4)$; $(-2; 0)$; $(0; 1)$; $(1; 2)$.

5. $5x^4 + 16x^3 - 9x^2 - 12x + 2 = 0$. Tres raíces en $(-1; 0)$; $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Aíslese la cuarta raíz.

6. Demuéstrese que para todo valor real de λ la ecuación

$$(x-2)(x-5)(x-7)(x-9) + \lambda(x-3)(x-6)(x-8)(x-10) = 0,$$

tiene todas las raíces reales y simples y sepáreselas.

7. Resuélvase el Problema 6 para

$$x(x^2-1)(x-2)+\lambda(2x+1)(3x-2)(2x-3)=0.$$

*8. Si $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n$ y λ es un número real, demuéstrese que las raíces de:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+\lambda(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_{n-1})=0,$$

son reales y simples. Sepáreselas.

*9. Si $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n$ y λ es real, ¿cuál es la naturaleza de las raíces de la ecuación

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+\lambda(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)=0\,?$$

Indíquense intervalos que contengan sólo una raíz.

10. Demuéstrese que las raíces de la ecuación

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}-10=0$$

son reales y simples y sepáreselas.

*11. Demostrar en general que las raíces de la ecuación

$$\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}-P=0$$

son reales y simples si $A_1 > 0$; $A_2 > 0$; ...; $A_n > 0$. Indíquense los intervalos que contengan cada uno sólo una raíz.

6. **Una identidad y un lema importantes.** — Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces de un polinomio

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

y sea

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

su factoreo. Reemplazando aquí x por $x+h$, podemos presentar $f(x+h)$ así:

$$f(x+h) = a_0(x+h-x_1)(x+h-x_2)\ldots(x+h-x_n) =$$

$$= a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots$$

$$\ldots(x-x_n)\left(1+\frac{h}{x-x_1}\right)\left(1+\frac{h}{x-x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{h}{x-x_n}\right),$$

o bien

$$f(x+h) = f(x)\left(1+\frac{h}{x-x_1}\right)\left(1+\frac{h}{x-x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{h}{x-x_n}\right).$$

El producto

$$\left(1+\frac{h}{x-x_1}\right)\left(1+\frac{h}{x-x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{h}{x-x_n}\right),$$

puede ser desarrollado en potencias crecientes de h, y los primeros dos términos de ese desarrollo son

$$1+h\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}\right).$$

Luego:

$$f(x+h)=f(x)+h\left[\frac{f(x)}{x-x_1}+\frac{f(x)}{x-x_2}+\ldots+\frac{f(x)}{x-x_n}\right]+\ldots$$

Por otra parte, por la fórmula de Taylor:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots$$

así que, comparando los coeficientes de h en ambas expresiones, obtenemos una importante identidad:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-x_1}+\frac{f(x)}{x-x_2}+\ldots+\frac{f(x)}{x-x_n},$$

que también puede ser escrita así:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}.$$

Las raíces de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ no necesitan ser todas diferentes; sean las distintas entre ellas $a, b, \ldots, l$ y sean $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sus multiplicidades. Entonces la identidad que acaba de deducirse puede presentarse en la forma

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\ldots+\frac{\lambda}{x-l}.$$

Escribiendo

$$f(x)=(x-a)^\alpha g(x),$$

el polinomio $g(x)$ tiene raíces $b, c, \ldots, l$ de multiplicidades $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$. Luego, aplicando la misma identidad a $g(x)$ tenemos

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\beta}{x-b}+\ldots+\frac{\lambda}{x-l},$$

y así

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha}{x-a}+\frac{g'(x)}{g(x)}. \qquad [1]$$

De ahora en adelante, supondremos que $f(x)$ tiene coeficientes reales; supondremos también que a es una raíz real. Entonces, $g(x)$ será un polinomio real y $g(a) \neq 0$. Sustituyendo en [1]: $x = a - \varepsilon$ y $x = a + \varepsilon$ tenemos

$$\frac{f'(a-\varepsilon)}{f(a-\varepsilon)} = -\frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{g'(\alpha-\varepsilon)}{g(\alpha-\varepsilon)} \quad ; \quad \frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)} = \frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{g'(\alpha+\varepsilon)}{g(\alpha+\varepsilon)} \, .$$

Ahora, si ε es positivo y pequeño, los términos

$$-\frac{\alpha}{\varepsilon} \quad \text{y} \quad \frac{\alpha}{\varepsilon} \, ,$$

serán números negativos y positivos que en valor absoluto sobrepasarán al de:

$$\frac{g'(a-\varepsilon)}{g(a-\varepsilon)} \quad \text{y} \quad \frac{g'(a+\varepsilon)}{g(a+\varepsilon)} \, ,$$

que para ε pequeño son casi iguales a la cantidad finita

$$\frac{g'(a)}{g(a)} \, .$$

Por lo tanto, para ε pequeño y positivo, el cociente

$$\frac{f'(a-\varepsilon)}{f(a-\varepsilon)} \, ,$$

será negativo y

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)} \, ,$$

será positivo, y ambas expresiones serán grandes en valor absoluto. Es ésta una importante propiedad que estableceremos como *lema. Cuando x crece y pasa por una raíz real de $f(x)$, el cociente*

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

al convertirse en infinito, cambia de signo de $-$ a $+$ o pasa de $-\infty$ a $+\infty$.

7. **El teorema de Rolle.** — Será fácil ahora demostrar un teorema importante conocido como *teorema de Rolle. Entre dos raíces (reales) consecutivas a y b de un polinomio $f(x)$ hay por lo menos una, y siempre, un número impar de raíces de su derivada $f'(x)$.*

DEMOSTRACIÓN: Desde que a y b son dos raíces consecutivas de $f(x)$, en el intervalo $a + \varepsilon \leqq x \leqq b - \varepsilon$ el signo de $f(x)$ no puede cambiar, así que

$$f(a + \varepsilon) \quad \text{y} \quad f(b - \varepsilon),$$

serán números del mismo signo. Pero si ε es pequeño y positivo

$$\frac{f'(a + \varepsilon)}{f(a + \varepsilon)} > 0 \quad ; \quad \frac{f'(b - \varepsilon)}{f(b - \varepsilon)} < 0,$$

por el lema del Párrafo 6; en consecuencia:

$$f'(a + \varepsilon) \quad \text{y} \quad f'(b - \varepsilon),$$

son de signos opuestos y entre a y b debe haber por lo menos una raíz de la derivada $f'(x)$ (Párrafo 4, Corolario 4). De cualquier forma, el número de raíces, contada cada una de acuerdo a su multiplicidad, será impar.

COROLARIO: *Entre dos raíces consecutivas c y d de la derivada $f'(x)$ existe a lo sumo una raíz de $f(x)$.* En primer lugar, tal raíz debe ser simple. Supóngase que haya dos raíces α y β de la ecuación $f(x) = 0$ entre c y d, de manera que $c < \alpha < \beta < d$. Entonces, por el teorema de Rolle, la derivada $f'(x)$ tendría por lo menos una raíz entre α y β, y c y d no serían dos raíces consecutivas de $f'(x)$. Similarmente, si f es la menor de las raíces de $f'(x)$ y g la mayor, cada uno de los intervalos $(-\infty; f)$ y $(g; +\infty)$ puede contener sólo una raíz de $f(x)$ en su interior. Es evidente que entre c y d no habrá ninguna raíz de $f(x)$ si

$$f(c) f(d) > 0$$

y solamente una si

$$f(c) f(d) < 0.$$

Igualmente, los intervalos $(-\infty; f)$ y $(g; +\infty)$ contienen o ninguna o sólo una raíz de $f(x)$ si en sus puntos extremos los signos de $f(x)$ son iguales o no.

Sobre estas observaciones puede basarse un método para separar las raíces de un polinomio, en caso de que sean simples, supuesto que las raíces de la derivada se conozcan. Sean todas las raíces distintas de $f'(x)$

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_r.$$

Escríbanse, uno detrás del otro, los signos de

$$f(-\infty) \quad ; \quad f(c_1) \quad ; \quad f(c_2) \; ; \ldots ; f(c_r) \quad ; \quad f(+\infty). \qquad [1]$$

En una sucesión de signos + ó — hay una *variación* si dos con-

secutivos son distintos, y una *permanencia* si son iguales. Por ejemplo, la sucesión

$$+ + - - + - + -$$

presenta cinco variaciones y dos permanencias. Adoptada esta terminología, el número de raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones en la sucesión [1]. Más aún, las raíces estarán separadas y asignados intervalos, cada uno de los cuales contiene una sola raíz.

Ejemplo 1. Separar las raíces de la ecuación

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10x^2 - 10x + 1.$$

Desde que

$$f'(x) = 10(x^4 - 2x^3 + 2x - 1) = 10(x-1)^3(x+1)$$

tiene dos raíces distintas 1 y -1, considérese

$$f(-\infty) \quad ; \quad f(-1) \quad ; \quad f(1) \quad ; \quad f(+\infty)$$

y escríbase la correspondiente sucesión de signos

$$- \quad + \quad - \quad + .$$

Esta presenta tres variaciones lo que indica tres raíces reales y simples, cada una en uno de los intervalos:

$$(-\infty; -1) \ ; \ (-1; 1) \ ; \ (1; +\infty)$$

Ejemplo 2. ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación

$$f(x) = x^4 - 4ax + b = 0\,?$$

La derivada

$$f'(x) = 4(x^3 - a)$$

tiene una sola raíz real

$$\sqrt[3]{a}$$

y

$$f(\sqrt[3]{a}) = -3a\sqrt[3]{a} + b$$

Si

$$b = 3a\sqrt[3]{a} \quad \text{ó} \quad b^3 = 27a^4$$

la única raíz real de la ecuación propuesta será la raíz múltiple $\sqrt[3]{a}$. Si $b^3 > 27a^4$, los signos de

$$f(-\infty) \ ; \ f(\sqrt[3]{a}) \ ; \ f(+\infty)$$

son

$$+ + +$$

así que en este caso todas las raíces son imaginarias. Finalmente, en el caso $b^3 < 27\,a^4$ la sucesión de signos

$$+ \; - \; +$$

indica dos raíces reales y simples, siendo la otra imaginaria. El uso de este método basado en el teorema de Rolle para separar las raíces, es limitado, pues sólo raramente se conocen las raíces de la derivada. La importancia de este teorema consiste en otras aplicaciones, algunas de las cuales se considerarán enseguida.

Problemas

Separar las raíces de las siguientes ecuaciones

1. $3\,x^4 - 4\,x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 1 = 0.$ **2.** $3\,x^4 - x^3 - 6\,x^2 + 3\,x + 1 = 0.$

3. $3\,x^4 - 2\,x^3 - 6\,x^2 + 6\,x - 2 = 0.$ **4.** $x^4 - 4\,x^3 + 4\,x^2 - 24\,x - 1 = 0.$

5. $2\,x^5 + 5\,x^4 - 10\,x^3 - 20\,x^2 + 40\,x + 5 = 0.$

6. $3\,x^5 - 25\,x^3 + 60\,x - 10 = 0.$ **7.** $x^{10} - 10\,x^3 + 5 = 0.$

8. $x^5 - 80\,x + 35 = 0.$ **9.** $x^6 - 6\,x^5 + 4 = 0.$

10. $5\,x^6 + 24\,x^5 + 30\,x^4 - 20\,x^3 - 75\,x^2 - 60\,x + 3 = 0.$

11. ¿Para qué valores de A la ecuación

$$(x + 3)^3 - A\,(x - 1)^2 = 0$$

tiene tres raíces reales?

12. ¿Para qué valores de A la ecuación

$$(x + 3)^3 - A\,(x - 1)^2 = 0$$

tiene tres raíces reales?

13. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una ecuación

$$x^3 + px + q = 0$$

tenga tres raíces reales distintas es $4\,p^3 + 27\,q^2 < 0$.

* **14.** En una ecuación trinomia

$$x^n + px^m + q = 0$$

de grado impar, el exponente m puede tomarse impar. Demostrar que el número de raíces reales es uno o tres, y que hay tres raíces reales y distintas sólo si

$$\left(\frac{mp}{n}\right)^n + \left(\frac{mq}{n - m}\right)^{n-m} < 0\,.$$

* **15.** En una ecuación trinomia

$$x^n + px^m + q = 0$$

de grado par, el exponente m puede ser impar o par y p puede ser tomado positivo si m es impar. Entonces, habrá dos raíces reales y distintas sólo si

$$\left(\frac{mq}{n - m}\right)^{n-m} < \left(\frac{mp}{n}\right)^n,$$

y ninguna si

$$\left(\frac{mq}{n-m}\right)^{n-m} > \left(\frac{mp}{n}\right)^{n}.$$

Si m es par, el número de raíces reales, de acuerdo a estos dos casos es cuatro o cero.

*** 16.** Si las raíces de $f(x) = 0$ son reales y simples, demostrar que las raíces de

$$f'(x)^2 - f(x) f''(x) = 0,$$

son todas imaginarias.

*** 17.** Las raíces de las ecuaciones $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ son reales y simples y se separan mutuamente; es decir, entre dos raíces consecutivas cualesquiera de una, hay justamente una raíz de otra. Llamando a las raíces de $g(x) = 0$: $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. demostrar que los cocientes

$$\frac{f(x_1)}{g'(x_1)} \;;\; \frac{f(x_2)}{g'(x_2)} \;;\; \ldots \;;\; \frac{f(x_m)}{g'(x_m)},$$

son del mismo signo.

*** 18.** En las mismas condiciones que en el problema anterior demostrar que todas las raíces de la ecuación

$$f(x) g'(x) - f'(x) g(x) = 0,$$

son imaginarias.

★ 8. Otras aplicaciones del teorema de Rolle. — Sea un polinomio con las raíces reales distintas

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_s,$$

de multiplicidades $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, respectivamente, de manera que en conjunto contamos

$$r = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_s,$$

raíces reales. Por el teorema de Rolle, cada uno de los intervalos

$$(b_1\,;b_2) \;;\; (b_2\,;b_3) \;;\; \ldots \;;\; (b_{s-1}\,;b_s),$$

contiene por lo menos una raíz de la derivada $f'(x)$. Desde que el número de intervalos es $s - 1$, tenemos no menos de $s - 1$ raíces distintas de $f'(x)$. Aún más, b_i será una raíz de multiplicidad $\beta_i - 1$ de $f'(x)$ (en el caso en que $\beta_i = 1$ no sea raíz). Sumando tenemos, por lo tanto

$$\beta_1 - 1 + \beta_2 - 1 + \ldots + \beta_s - 1 = r - s,$$

raíces diferentes, de las numeradas antes. En conjunto, la ecuación $f'(x) = 0$ tendrá, por lo menos

$$r - s + s - 1 = r - 1,$$

raíces reales. Luego, podemos establecer la conclusión:

Si una ecuación $f(x) = 0$ tiene r raíces reales, el número de raíces reales de $f'(x) = 0$ es, por lo menos, $r - 1$; o, lo que es lo mismo, el número de raíces imaginarias de la derivada no es mayor que el número de raíces imaginarias de $f(x)$. En efecto, sea $2k$ el número de raíces imaginarias de $f(x)$ y n el grado de este polinomio; entonces:

$$n = r + 2k$$

Análogamente, si r' es el número de raíces reales de $f'(x)$ y $2k'$ el de las raíces imaginarias:

$$n - 1 = r' + 2k' .$$

Pero $r' \geqq r - 1$ y por lo tanto

$$n = r + 2k \geqq r + 2k' .$$

desde que $2k' \leqq 2k$. En particular, si todas las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ son reales, la derivada $f'(x) = 0$ no puede tener raíces imaginarias; esto es, todas sus raíces son también reales. En este caso especial, puede decirse algo más acerca de las raíces de la derivada. Desde que $k' = 0$, debemos tener $r' = r - 1$. Esto significa que cada uno de los intervalos

$$(b_1 ; b_2) \quad ; \quad (b_2 ; b_3) \; ; \; \ldots \; ; (b_{s-1} ; b_s) \; ,$$

contendrá justamente una de las raíces de $f'(x)$, necesariamente simple, y las otras raíces de $f'(x)$ serán raíces múltiples de $f(x)$. Luego, las raíces múltiples de $f'(x)$ son necesariamente raíces múltiples de $f(x)$, supuesto que este polinomio tuviera sólo raíces reales, y $f'(x)$ tendrá raíces simples, si $f(x)$ tiene por lo menos dos raíces distintas. Aún más, las raíces de $f'(x)$ están comprendidas entre la menor y la mayor raíz de $f(x)$. Aplicando el mismo razonamiento a $f'(x)$, luego a $f''(x)$, etc., podemos finalmente establecer el siguiente enunciado: Si todas las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ son reales, lo mismo sucederá con las ecuaciones

$$f'(x) = 0 \quad ; \quad f''(x) = 0 \quad ; \quad f'''(x) = 0 \; ; \ldots$$

Las raíces múltiples de cada una de éstas, lo serán tambien múltiples de $f(x)$, y cada una tendrá raíces simples si no todas las raíces de $f(x) = 0$ son iguales. Ninguna raíz estará fuera del intervalo entre la mayor y la menor raíz de $f(x) = 0$.

Los dos ejemplos siguientes ilustrarán las aplicaciones que pueden hacerse de este teorema:

Ejemplo 1. Sean $a < b$ dos números reales y sea

$$f(x) = (x - a)^n (x - b)^n .$$

La ecuación $f(x) = 0$ tiene sólo las raíces reales a y b y ambas de multiplicidad n. Luego, la ecuación

$$\frac{d^n}{dx^n}\,[(x-a)^n (x-b)^n] = 0,$$

de grado n tendrá solamente raíces reales. Estas raíces serán simples, desde que ni a ni b aparecen entre ellas y estarán contenidas entre a y b.

Ejemplo 2. Sea

$$f(x) = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n).$$

Desarrollando $f(x)$ en potencias decrecientes de x, el coeficiente de x^{n-i} será la suma

$$s_i = \Sigma\, a_1 a_2 \ldots a_i,$$

de todos los productos de las i cantidades tomadas entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$. El número de términos de la suma es

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i} = \binom{n}{i}.$$

Llamando, por lo tanto, p_i a la media aritmética de todos los productos de i factores tomados entre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tenemos

$$s_i = \binom{n}{i} p_i$$

y podemos escribir

$$f(x) = x^n + \binom{n}{1} p_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n,$$

de donde se sigue que

$$f(x) = n\left[x^{n-1} + \binom{n-1}{1} p_1 x^{n-2} + \binom{n-1}{2} p_2 x^{n-3} + \ldots + p_{n-1}\right],$$

por aplicación repetida de este resultado podemos concluir que la derivada de orden s difiere sólo en una constante de

$$x^{n-s} + \binom{n-s}{1} p_1 x^{n-s-1} + \ldots + p_{n-s}.$$

Supóngase ahora que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales distintos entre sí. Entonces, la ecuación

$$x^{n-s} + \binom{n-s}{1} p_1 x^{n-s-1} + \ldots + p_{n-s} = 0$$

tiene solamente raíces reales y no son todas iguales. Reemplácese s por $n-k-1$ y sustitúyase $x = y^{-1}$; la ecuación transformada

$$p_{k+1}\, y^{k+1} + \binom{k+1}{1} p_k\, y^k + \binom{k+1}{2} p_{k-1}\, y^{k-1} + \ldots + 1 = 0$$

tiene análogamente, sólo raíces reales y no iguales. Tomando la $(k-1)$-ésima derivada y eliminando el factor constante, llegamos a la ecuación

$$p_{k+1}\, y^2 + 2\, p_k\, y + p_{k-1} = 0\,,$$

con raíces reales y distintas, lo que supone la desigualdad

$$p_k^2 > p_{k-1}\, p_{k+1}\,,$$

que se cumple para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. En particular, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos, $p_1, p_2, \ldots p_n$ serán positivos. Tomando $k = 1$, tenemos

$$p_1^2 > p_2$$

o bien

$$p_2^{1/2} < p_1\,.$$

Para $k = 2$ tenemos

$$p_2^2 > p_1\, p_3 > p_2^{1/2}\, p_3$$

de donde

$$p_3^{1/3} < p_2^{1/2}.$$

Tomando nuevamente $k = 3$, tenemos

$$p_3^2 > p_2\, p_4 > p_3^{2/3}\, p_4$$

de donde

$$p_4^{1/4} < p_3^{1/3}$$

y continuando de la misma forma, es fácil verificar que, en general

$$p_{\nu+1}^{\frac{1}{\nu+1}} < p_{\nu}^{\frac{1}{\nu}}\,.$$

Así, establecemos la sucesión de notables desigualdades

$$p_1 > p_2^{1/2} > p_3^{1/3} > \ldots > p_n^{1/n}$$

que se cumple para cualquier cantidad positiva $a_1, a_2, \ldots, a_n$, supuesto que no todas son iguales. En particular:

$$p_1 = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

y

$$p_n = a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n\,,$$

tal que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n}\,,$$

y ésta es la clásica desigualdad de Cauchy, que expresa el hecho de que la media aritmética de números positivos es mayor que la media geométrica, siempre que no todos los números sean iguales ★.

Problemas

*** 1.** Demostrar que las raíces de la ecuación

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right)^2 x^3 + \ldots + x^n = 0,$$

son reales, simples, y contenidas entre 0 y 1.

*** 2.** Si las raíces de la ecuación

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

son reales, entonces

$$a_i^2 \geqq a_{i-1} a_{i+1} .$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

*** 3.** Si las raíces de la ecuación $f(x)$ son reales y simples, demostrar que las raíces de la ecuación

$$(n-1) f'^2 - n f f'' = 0,$$

son imaginarias. Nótese que para un valor de x arbitrario las raíces de la ecuación en z

$$f(x) z^n + f'(x) z^{n-1} + \frac{f''(x)}{1.2} z^{n-2} + \ldots = 0$$

son reales y distintas.

*** 4.** Siendo las raíces de $f(x) = 0$ reales, demostrar que lo mismo es cierto con respecto a las ecuaciones

$$xf'(x) + f(x) = 0 \quad ; \quad xf'(x) + 2f(x) = 0 \quad ; \quad xf'(x) + 3f(x) = 0 ; \ldots$$

*** 5.** Si las raíces de la ecuación

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

son reales, demostrar que lo mismo es cierto para la ecuación

$$(n+1)^k a_0 x^n + n^k a_1 x^{n-1} + (n-1)^k a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

donde k es un entero positivo.

*** 6.** Demostrar que las raíces de la ecuación

$$(n+1)^{n-1} x^n + n^n x^{n-1} + \frac{n(n-1)^n}{1.2} x^{n-2} + \ldots + 1 = 0,$$

son reales.

*** 7.** Las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ son reales y simples y se separan mutuamente. Demostrar que la misma propiedad se mantiene para $f'(x) = 0$ y $g'(x) = 0$. Véase el Problema 18, Párrafo 7.

*** 8.** Demostrar que las raíces de la ecuación

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} = 0$$

son todas imaginarias si n es par, y todas menos una, si n es impar.

*** 9.** Demostrar lo mismo para la ecuación

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} = 0.$$

9. **Un teorema de de Gua.** —Consideraremos ahora una ecuación de de la forma

$$F(x) = xf'(x) + \alpha f(x),$$

en la cual α es una constante arbitraria, positiva o negativa. Sea

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_s,$$

raíces positivas y distintas de

$$f(x) = 0,$$

y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ sus multiplicidades, de tal modo que, en conjunto, tenemos

$$r = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_s,$$

raíces positivas. La raíz b_i, en el caso en que $\beta_i > 1$ será también una raíz de la ecuación $F(x) = 0$, pero de multiplicidad $\beta_i - 1$. Pues

$$f(x) = (x - b_i)^{\beta i} f_1(x)$$

$$f'(x) = (x - b_i)^{\beta i - 1} f_2(x),$$

de donde

$$F(x) = (x - b_i)^{\beta i - 1}[xf_2(x) + \alpha(x - b_i) f_1(x)],$$

pero

$$f_3(x) = xf_2(x) + \alpha(x - b_i) f_1(x),$$

para $x = b_i$ se reduce a

$$b_i f_2(b_i),$$

—número distinto de cero—, y esto prueba que b_i es una raíz de $F(x)$ de multiplicidad $\beta_i - 1$. Así, la ecuación $F(x) = 0$ tiene, ciertamente

$$\beta_1 - 1 + \beta_2 - 1 + \ldots + \beta_s - 1 = r - s$$

raíces y además, tiene una raíz por lo menos en cada uno de los intervalos

$$(b_1, b_2) \ ; \ (b_2, b_3) \ ; \ldots ; (b_{s-1}, b_s).$$

Para demostrarlo, sea ε un número positivo pequeño. Entonces:

$$x\frac{f'(x)}{f(x)},$$

para $x = b_i + \varepsilon$ será un número positivo grande, mientras que para $x = b_{i+1} - \varepsilon$ será negativo y grande numéricamente (Párrafo 6). Se deduce que

$$\frac{F(b_i + \varepsilon)}{f(b_i + \varepsilon)} > 0 \quad ; \quad \frac{F(b_{i+1} - \varepsilon)}{f(b_{i+1} - \varepsilon)} < 0\,,$$

para ε suficientemente pequeño, mientras que

$$f(b_i + \varepsilon) \quad \text{y} \quad f(b_{i+1} - \varepsilon)\,,$$

tienen el mismo signo. Por lo tanto:

$$F(b_i + \varepsilon) \quad \text{y} \quad F(b_{i+1} - \varepsilon)\,,$$

tienen signos opuestos, y la ecuación

$$F(x) = 0\,,$$

tiene, por lo menos, una raíz en el intervalo $(b_i; b_{i+1})$. A las $r - s$ raíces previamente contadas, pueden agregarse por lo menos $s - 1$ raíces distintas de aquéllas, de modo que, en total, la ecuación

$$F(x) = xf'((x) + \alpha f(x) = 0\,,$$

tiene por lo menos $r - 1$ raíces positivas si el polinomio tiene r raíces positivas, importante enunciado que se utilizará en el párrafo próximo.

★ Puede demostrarse de manera similar, que el número de raíces negativas de $F(x) = 0$ no es mayor que $r' - 1$, si r' representa el número de raíces negativas de $f(x) = 0$. El número total de raíces reales de la última ecuación es

$$m = r + r'\,,$$

si $f(0) \neq 0$ y

$$m = r + r' + \nu\,,$$

si $f(x)$ tiene el cero como raíz de multiplicidad ν. En este caso es fácil verificar que $F(x)$ es divisible por x^ν, de modo que el cero es raíz de multiplicidad por lo menos igual a ν para la ecuación $F(x) = 0$. Desde que el número de raíces positivas y negativas de esta ecuación es, por lo menos, $r + r' - 2$, el número de todas sus raíces reales nunca es menor que $m - 2$. En particular, si todas las raíces de $f(x)$ son reales, la ecuación

$$xf'(x) + \alpha f(x) = 0\,,$$

no puede tener más de dos raíces imaginarias puesto que su grado no es mayor que el de $f(x)$. Puede verse con un ejemplo que puede tener

raíces imaginarias aún cuando las raíces de $f(x)$ sean reales. Tómese $f(x) = x^3 - x$, luego

$$F(x) = (\alpha + 3)\,x^3 - (\alpha + 1)\,x\,,$$

y para $\alpha = -2$

$$F(x) = x^3 + x = x\,(x^2 + 1)\,.$$

Este polinomio tiene dos raíces imaginarias. Sin embargo, todas las raíces de

$$xf'(x) + \alpha f(x) = 0\,,$$

serán reales si α es positivo. Para demostrarlo, considérese el cociente

$$\frac{F(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \varepsilon\,\frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} + \alpha\,.$$

Este cociente es evidentemente positivo si $f(0) \neq 0$ y ε es suficientemente pequeño. Por otra parte, en el caso de $f(0) = 0$

$$\frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}\,,$$

es positivo para ε positivo y pequeño. Luego, para ε positivo y pequeño, el cociente

$$\frac{F(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}\,,$$

es positivo, mientras que el cociente

$$\frac{F(b_1 - \varepsilon)}{f(b_1 - \varepsilon)}\,,$$

es negativo. Desde que $f(\varepsilon)$ y $f(b_1 - \varepsilon)$ tienen el mismo signo, $F(\varepsilon)$ y $F(b_1 - \varepsilon)$ tienen signos opuestos y hay por lo menos una raíz de $F(x)$ entre 0 y b_1. Así, si n es el grado de $f(x)$, la ecuación $F(x) = 0$ tiene, por lo menos, $n - 1$ raíces reales, de modo que todas sus raíces son reales ★.

Problemas.

*** 1.** Siendo las raíces de $f(x) = 0$ reales, demostrar que lo mismo es cierto para la ecuación

$$xf'(x) + \alpha f(x) = 0$$

no sólo para α positivo sino para $\alpha < -n$, donde n es el grado de $f(x)$.

*** 2.** Siendo las raíces de $f(x) = 0$ reales, demostrar que lo mismo es cierto de la ecuación

$$f(x) + cxf'(x) + x^2 f''(x) = 0$$

si $c \geqq 3$.

*** 3.** Sea $g(x) = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \ldots (x + \alpha_n)$ un polinomio con raíces reales y negativas. Siendo las raíces de

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

reales, demostrar que lo mismo se cumple para

$$a_0 g(n) x^n + a_1 g(n-1) x^{n-1} + \ldots + g(0) a_n = 0.$$

*** 4.** Para un λ real arbitrario, la ecuación

$$\lambda f(x) + f'(x) = 0,$$

no tiene más raíces imaginarias que $f(x) = 0$.

*** 5.** Demostrar que lo mismo es cierto para la ecuación

$$af(x) + bf'(x) + cf''(x) = 0,$$

si las raíces de

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son reales.

*** 6.** Los polinomios de Hermite $H_n(x)$ se definen por

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = H_n(x) e^{-x^2}.$$

Demostrar que

$$H_{n+1}(x) = H_n'(x) - 2x H_n(x),$$

y luego deducir que las raíces de $H_n(x)$ son reales y simples. Demostrarlo por inducción.

10. **Regla de los signos de Descartes.** — En una sucesión de números

$$a_0, a_1, \ldots, a_n,$$

ninguno de los cuales es nulo, dos términos consecutivos

$$a_{i-1} \quad \text{y} \quad a_i,$$

pueden tener el mismo o distinto signo. En el primer caso decimos que los términos a_{i-1}, a_i presentan una *permanencia* de signos y en el segundo caso una *variación* de signos. Por ejemplo, en la sucesión

$$-2, -3, 4, 4, -1, 7, 7, 7, -5, -4, 1$$

hay cinco variaciones y cinco permanencias. Si algunos de los términos de la sucesión son ceros, simplemente no se los tiene en cuenta al contar el número de permanencias y variaciones. Así, en la sucesión

$$1, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 2, 3, -1, 0, 0$$

hay tres variaciones y dos permanencias. Adoptada esta terminología podemos enunciar el siguiente teorema clásico, conocido como

Regla de los signos de Descartes: El número de raíces reales positivas de una ecuación con coeficientes reales

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0\,,$$

nunca es mayor que el número de variaciones en la sucesión de sus coeficientes

$$a_0\,,\, a_1\,,\, \dots\,,\, a_n\,,$$

y, si es menor, siempre lo es en un número par.

Demostración: Llamemos V al número de variaciones y r al número de raíces positivas, cada una contada de acuerdo a su orden de multiplicidad. Queremos demostrar que

$$V = r + 2\,h\,,$$

siendo h un entero no negativo. El teorema es evidente en el caso $V = 0$, pues si todos los coeficientes que no son nulos son del mismo signo, la ecuación no tiene raíces positivas, así que $r = 0$. Suponiendo que el teorema sea cierto para $V - 1$ variaciones, demostraremos que es verdad en el caso de V variaciones, y esto es suficiente para concluir, por inducción, la generalidad del teorema.

Sean a_α y a_β, $\beta > \alpha$, dos coeficientes de signos opuestos, siendo los coeficientes intermedios (si los hay) ceros. El número de variaciones V se compone de tres partes: el número de variaciones v_1 en la sección

$$a_0\,,\, a_1 \dots,\, a_\alpha\,,$$

una variación en la

$$a_\alpha\,,\, \dots\,,\, a_\beta\,,$$

y el número de variaciones v_2 en la sección

$$a_\beta,\, \dots,\, a_n\,,$$

tal que

$$V = v_1 + v_2 + 1\,.$$

Considérese ahora una nueva ecuación

$$F(x) = x f'(x) - \lambda f(x) = 0\,,$$

cuyos coeficientes son

$$(n - \lambda)\, a_0 \;\; ; \;\; (n - 1 - \lambda)\, a_1\,;\, \dots\,;\, (n - \alpha - \lambda)\, a_\alpha\,;\, \dots$$
$$(n - \beta - \lambda)\, a_\beta\,;\, \dots\,;\, -\lambda\, a_n\,,$$

y elíjase λ tal que

$$n - \alpha - \lambda > 0 \;\; ; \;\; n - \beta - \lambda < 0\,,$$

o sea

$$n - \beta < \lambda < n - \alpha,$$

lo que es posible desde que $\beta > \alpha$. Teniendo en cuenta que los factores

$$n - \lambda \;\; ; \;\; n - 1 - \lambda \, ; \, \ldots \, ; n - \alpha - \lambda,$$

son positivos, mientras que los factores

$$n - \beta - \lambda \;\; ; \;\; n - \beta - 1 - \lambda \, ; \, \ldots \, ; n - n - \lambda = -\lambda,$$

son negativos, en las secciones

$$(n - \lambda)\, a_0 \, ; \, \ldots \, ; (n - \alpha - \lambda)\, a_\mu$$

y

$$(n - \beta - \lambda)\, a_\beta \, ; \, \ldots \, ; -\lambda\, a_n,$$

contamos, respectivamente, v_1 y v_2 variaciones, pero en la sección

$$(n - \alpha - \lambda)\, a_\alpha \, ; \, \ldots \, ; (n - \beta - \lambda)\, a_\beta,$$

no hay variaciones, desde que los términos extremos son los dos del mismo signo y los intermedios son cero. Así, en la ecuación

$$F(x) = xf'(x) - \lambda f(x) = 0,$$

el número de variaciones es $v_1 + v_2 = V - 1$. Por el teorema de de Gua (Párrafo 9) el número de raíces positivas de esta ecuación no es menor que $r - 1$. Suponiendo que el teorema es cierto en el caso de $V - 1$ variaciones, tenemos:

$$r - 1 \leqq V - 1$$

de donde

$$r \leqq V.$$

Resta por demostrar que la diferencia $V - r$ es un número par. En la sucesión

$$a_0 \, , \, a_1 \ldots , a_n,$$

sea a_ν el último término que es distinto de cero. Entonces, si V es par, a_ν y a_0 tienen el mismo signo, y si V es impar, signos opuestos. El polinomio

$$f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_\nu x^{n-\nu},$$

para valores positivos pequeños, tiene el signo de a_ν, y para valores positivos grandes, el de a_0. Luego, si a_0 y a_ν tienen el mismo signo, el número de raíces positivas es par, lo mismo que V; y si a_0 y a_ν tienen signos opuestos, el número de tales raíces es impar, igual que V. Así, r y V

son ambos pares o impares, y su diferencia $V - r$ es un número par, que era lo que faltaba demostrar.

Cambiando x por $-x$ en la ecuación $f(x) = 0$ obtenemos otra ecuación $f(-x) = 0$ que evidentemente tiene tantas raíces positivas, como negativas tiene la ecuación dada. Luego, si r' es el número de raíces negativas de la ecuación propuesta, y V' el número de variaciones correspondientes a $f(-x)$, entonces:

$$V' = r' + 2h',$$

donde h' es un entero no negativo.

La regla de los signos indica el número exacto de raíces en dos casos: $V = 0$ y $V = 1$. En el primer caso, evidentemente $r = 0$; y en el segundo, la relación

$$r + 2h = 1,$$

con h entero no negativo, requiere $h = 0$ y $r = 1$. Este resultado particular puede demostrarse independientemente como sigue: Si hay solamente una variación en la sucesión

$$a_0\ ,\ a_1, \ldots, a_n,$$

puede dividirse en dos partes: la primera

$$a_0\ ,\ a_1 \ldots, a_{\mu-1},$$

que consiste de términos, digamos, positivos y nulos; y la segunda

$$a_\mu = -b_0\ ;\ a_{\mu+1} = -b_1\ ; \ldots ;\ a_n = -b_{n-\mu},$$

comenzando con un término negativo a_μ, y que consiste de términos negativos y nulos. El polinomio $f(x)$ puede presentarse así:

$$f(x) = x^{n-\mu+1}\left[a_0 x^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu-1} - \left(\frac{b_0}{x} + \ldots + \frac{b_{n-\mu}}{x^{n-\mu+1}}\right)\right].$$

La expresión entre corchetes, por ser la diferencia entre una función creciente y otra decreciente, es una función creciente que, de un valor negativo muy grande (para x pequeño y positivo) pasa a un valor positivo muy grande (para x grande y positivo) y por lo tanto pasa por cero una sola vez. Luego hay una sola raíz positiva de la ecuación $f(x) = 0$.

En el caso que $V > 1$, la regla de Descartes indica sólo un límite superior del número de raíces positivas y negativas, y algunas veces revela infaliblemente la presencia de raíces imaginarias, como veremos en los ejemplos.

Ejemplo 1. Sea la ecuación

$$f(x) = x^4 + x^2 - x - 3 = 0.$$

Desde que $f(x)$ y $f(-x)$ presentan ambos una sola variación, hay una raíz positiva y otra negativa. Las dos restantes son imaginarias.

Ejemplo 2. Considérese la ecuación

$$f(x) = x^6 - x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Para esta ecuación $V = 3$, de manera que habrá una o tres raíces positivas. Cambiando x por $-x$, en la ecuación transformada

$$f(-x) = x^6 + x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$V' = 1$, y entonces hay sólo una raíz negativa de la ecuación dada. El total de raíces reales no es mayor que cuatro y, dos raíces por lo menos, son imaginarias. El número exacto de raíces imaginarias puede hallarse en este ejemplo de la siguiente manera: Multiplicando $f(x)$ por $(x+1)^2$ no cambiamos el número de raíces positivas pero

$$(x+1)^2 f(x) = x^8 + 2x^7 + x^6 - x^5 - 5x^2 - 5x - 1$$

presenta una sola variación. Luego, hay sólo una raíz positiva y cuatro son imaginarias.

Problemas

¿Cuántas raíces tienen las siguientes ecuaciones?

1. $x^6 + x^4 - x^3 - 2x - 1 = 0.$
2. $x^4 - x^2 + x - 2 = 0.$ Multiplíquese por $(x+2)$.
3. $x^5 + x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0.$ Multiplíquese por $(x+1)$.
4. $x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$ Multiplíquese por $(x+1)$.
5. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 = 0.$ Multiplíquese por $(1+x)^2$.
6. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 = 0.$ Multiplíquese por $(1+x)^2$.
7. $1 - 2x + 3x^2 - \ldots + (2n+1)x^{2n} = 0.$
8. $1 - 2x + 3x^2 - \ldots - 2nx^{2n-1} = 0.$

★ 11. **Las ecuaciones con raíces reales.** — La regla de los signos indica exactamente el número de raíces positivas y negativas en el caso en que todas las raíces de la ecuación sean reales. Como antes, representemos por V y V' el número de variaciones en la sucesión de los coeficientes.

$$a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ , \qquad [1\,a]$$

de $f(x)$, y en la sucesión

$$a_0\ ,\ -a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ (-1)^n a_n\ , \qquad [2\,a]$$

correspondientes a $(-1)^n f(-x)$. Entonces, si $f(x)$ es un polinomio completo, de tal manera que todos los términos de la sucesión $[1a]$ sean distintos de cero, tenemos

$$V + V' = n.$$

De hecho, a cada permanencia de [1a] corresponde una variación en [2a] y viceversa. Luego, $V + V'$ es el número de variaciones y permanencias en la sucesión [1a], que es n.

Si $f(x)$ no es un polinomio completo, demostraremos que siempre

$$V + V' \leqq n\,.$$

Sean

$$a_0\ ,\ a_\alpha\ ,\ a_\beta\ ,\ \ldots ,\ a_\mu\ ,\ a_\nu\ , \qquad [1\,b]$$

los términos de la sucesión [1a] distintos de cero. Entonces, los términos distintos de cero en la sucesión [2a] serán

$$a_0\ ,\ (-1)^\alpha a_\alpha\ ,\ (-1)^\beta a_\beta\ ,\ \ldots ,\ (-1)^\mu a_\mu\ ,\ (-1)^\nu a_\nu\,. \qquad [2\,b]$$

Naturalmente las sucesiones [1a] y [2a] presentan V y V' variaciones respectivamente. Ahora reemplacemos las sucesiones [1b] por

$$a_0\,,\, a_0\,,\ \ldots\ ,\, a_\alpha\,,\, a_\alpha\,,\ \ldots\ ,\, a_\beta\,,\ \ldots\ ,\, a_\mu\,,\ \ldots\ ,\, a_\mu\,,\, a_\nu\,,\, a_\nu\,,\ \ldots\ ,\, a_\nu \qquad [1\,c]$$

de manera de tener una sucesión completa de $n + 1$ términos, todos distintos de cero. Es evidente que el número de variaciones en [1c] es también V. De [1c] deducimos otra sucesión de $n + 1$ términos, cambiando alternadamente los signos de los términos de [1c]:

$$a_0\ ,\ -a_0\ ,\ \ldots\ ,\ (-1)^\alpha a_\alpha\ ,\ (-1)^{\alpha+1} a_\alpha\ ,\ \ldots$$
$$\ldots\ ,\ (-1)^\beta a_\beta\ ,\ \ldots\ ,\ (-1)^\nu a_\nu\ ,\ \ldots\ ,\ (-1)^n a_\nu\,. \qquad [2\,c]$$

Sea V'' el número de variaciones en la sucesión [2c]. Entonces, por otra parte

$$V + V'' = n\,,$$

desde que [1c] es una sucesión completa de $n + 1$ términos; y además, $V' \leqq V''$. Esto puede verse fraccionando las sucesiones [2c] y [2b] en secciones correspondientes como sigue:

$a_0\ ,\ -a_0,\ \ldots\ ,\ (-1)^\alpha a_\alpha$ que corresponde a $a_0\ ,\ (-1)^\alpha a_\alpha$

$(-1)^\alpha a_\alpha\ ,\ \ldots\ ,\ (-1)^\beta a_\beta$ que corresponde a $(-1)^\alpha a_\alpha\ ,\ (-1)^\beta a_\beta$

. . . .

$(-1)^\mu a_\mu\ ,\ \ldots\ ,\ (-1)^\nu a_\nu$ que corresponde a $(-1)^\mu a_\mu\ ,\ (-1)^\nu a_\nu$

y la

$$(-1)^\nu a_\nu\ ,\ \ldots\ ,\ (-1)^n a_\nu\,,$$

que no tiene correspondiente en [2b]. Naturalmente que cada sección de [2c] no tiene menos variaciones que la correspondiente de [2b], por lo que se deduce que $V' \leqq V''$, y además

$$V + V'' \leqq n\,,$$

como deseábamos demostrar. Ahora, si r y r' son los números de raíces positivas y negativas de la ecuación $f(x) = 0$, de grado n, cuyas raíces son reales y distintas de cero, tenemos:

$$r + r' = n\,.$$

Por otra parte:

$$V = r + 2\,h \quad ; \quad V' = r' + 2\,h'\,,$$

tal que

$$V + V' = r + r' + 2\,h + 2\,h' = n + 2\,h + 2\,h' \leqq n\,,$$

o sea

$$h + h' \leqq 0\,,$$

que es posible sólo si $h = h' = 0$, y entonces

$$r = V \quad ; \quad r' = V'\,.$$

Se ha supuesto que cero no es raíz de la ecuación, pero es casi evidente que se mantiene la conclusión aún si hay raíces iguales a cero.

Ejemplo. Dado que todas las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^6 - 15\,x^4 + 40\,x^3 - 45\,x^2 + 24\,x - 5 = 0$$

son reales, encontrar cuántas raíces tiene entre 0 y 2 y entre 2 y 3. En general, para determinar el número de raíces en el intervalo $a < x \leqq b$, es suficiente encontrar el número de raíces $> a$ y restar éste del número de las raíces $> b$. El número de raíces $> a$ es el mismo que el de las raíces positivas de la ecuación transformada obtenida de la ecuación original por la sustitución $x = a + y$. En nuestro ejemplo haremos las transformaciones $x = 2 + y$ y $x = 3 + y$, por la regla de Horner.

2)	1	0	—15	40	—45	24	—5
		2	4	—22	36	—18	12
		2	—11	18	— 9	6	7
		2	8	— 6	24	30	
		4	— 3	12	15	36	
		2	12	18	60		
		6	9	30	75		
		2	16	50			
		8	25	80			
		2	20				
		10	45				
		2					
		12					
	1						

3)	1	0	—15	40	—45	24	—5
		3	9	—18	66	63	261
		3	— 6	22	21	87	256
		3	18	36	174	585	
		6	12	58	195	672	
		3	27	117	525		
		9	39	175	720		
		3	36	225			
		12	75	400			
		3	45				
		15	120				
		3					
		18					
	1						

Los números subrayados, leídos de abajo hacia arriba, representan los coeficientes de las ecuaciones transformadas. Por ser todos positivos, no hay raíces mayores que 2; luego, el número de raíces entre 2 y 3 es cero. Por otra parte, la ecuación original tiene cinco variaciones, lo que indica la presencia de cinco raíces positivas. Consecuentemente, entre 0 y 2 hay justamente cinco raíces y, siendo el grado de la ecuación igual a 6, la sexta es negativa. En efecto:

$$f(x) = (x - 1)^5 (x + 5) \bigstar$$

Problemas

Las raíces de las siguientes ecuaciones son reales. Encontrar el número de ellas en los intervalos especificados.

1. $2x^3 - 9x^2 + 6 = 0$; $(0; 1)$ y $(4; 5)$.

2. $5x^3 - 9x + 2 = 0$; $(0, 1)$ y $(1; 2)$.

3. $x^3 - 27x + 5 = 0$; $(4; 5)$.

4. $24x^4 - 96x^3 + 72x^2 - 16x + 1 = 0$; $(1; 2)$ y $(2; 3)$.

5. $x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$; $(-3; -1)$ y $(0; 1)$.

6. $x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0$; $(0; 1)$ y $(-1; 0)$.

7. Demostrar que una ecuación tiene raíces imaginarias si faltan términos entre dos del mismo signo, o faltan más de dos términos entre dos de signos opuestos.

*** 8.** Una ecuación tiene raíces imaginarias si tres coeficientes consecutivos están en progresión geométrica.

*** 9.** Una ecuación tiene raíces imaginarias si los coeficientes de cuatro términos consecutivos están en progresión aritmética. Multiplíquese por $(x - 1)^2$.

*** 10.** Demostrar que la ecuación

$$x^n + (a + b)x^{n-1} + (a^2 + ab + b^2)x^{n-2} + \ldots + (a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n) = 0$$

no puede tener más que una raíz real, supuestos a y b reales. Multiplíquese por $(x - a)(x - b)$.

12. **Un método completo de separación de raíces.** — Aun cuando el teorema de Rolle y la regla de los signos pueden a menudo ayudar a separar las raíces de una ecuación no proporcionan de por sí una solución completa y exhaustiva de este importante problema. La aplicación del teorema de Rolle con este propósito requiere el conocimiento de las raíces reales de la derivada que la mayoría de las veces no se posee. La regla de los signos es, quizá, un enunciado débil, y aplicado a una ecuación en la que la naturaleza de sus raíces no se conoce, no da el número exacto de raíces positivas (o negativas), excepto cuando el número de variaciones es cero o uno. Pero cuando se combinan estos dos casos particulares con un notable teorema publicado por Vincent en 1863 y seguido por Fourier, proporcionan el método más eficiente, no sólo para determinar el número exacto de raíces positivas y negativas, sino también para efectuar su separación en el caso en que la ecuación propuesta no tenga raíces múltiples. Hemos visto (Capítulo III, Párrafo 6) que la solución de las ecuaciones con raíces múltiples puede reducirse a la solución de ciertas ecuaciones con raíces simples. Por lo tanto, no es una limitación esencial el suponer que la ecuación propuesta no tiene raíces múltiples.

El teorema de Vincent puede enunciarse de la manera siguiente: *Sea a, b, c, ... una sucesión arbitraria de enteros positivos. Transformando una ecuación sin raíces múltiples mediante una serie de sucesivas sustituciones*

$$x = a + \frac{1}{y} \quad ; \quad y = b + \frac{1}{z} \quad ; \quad z = c + \frac{1}{t} \; ; \; \text{etc.},$$

luego de un cierto número de estas transformaciones, e independientemente de la elección de los enteros a, b, c, ..., llegamos a una ecuación transformada con no más de una variación.

La demostración se encontrará en el Apéndice II. La idea del método, que será ilustrada en seguida con varios ejemplos, es muy simple. Para encontrar el número exacto de raíces positivas (y nos podemos concretar sólo a este caso) notaremos que las raíces positivas pueden ser > 1 ó < 1 excluyendo el caso en que 1 es raíz. Las raíces positivas > 1 pueden escribirse en la forma $x = 1 + y$ con $y > 0$, mientras que para aquellas < 1, será $x = \dfrac{1}{1+y}$ donde es también $y > 0$. Por lo tanto, la ecuación propuesta se transformará mediante las sustituciones $x = 1 + y$ y $x = \dfrac{1}{1+y}$ y estas transformaciones pueden realizarse muy convenientemente, utilizando sólo sumas, como se verá en los ejemplos. Si la ecuación transformada no tiene variaciones o tiene sólo una, el problema está resuelto; pues por ejemplo, si la ecuación obtenida por la

transformación $x = 1 + y$ no tiene variaciones, esto significa que la ecuación original no tiene raíces > 1; y la presencia de una sola variación en la ecuación transformada indica sólo una raíz > 1 en la ecuación propuesta. Una conclusión similar es cierta para la ecuación resultante de la transformación $x = \dfrac{1}{1+y}$.

Si una o ambas ecuaciones transformadas tienen más de una variación, las transformamos nuevamente por las sustituciones $y = 1 + z$, $y = \dfrac{1}{1+z}$ y si es necesario continuamos las transformaciones mediante sustituciones del mismo tipo hasta que las ecuaciones obtenidas por este proceso no tengan más de una variación. Esto ocurrirá necesariamente después de un número finito de pasos, pues las transformaciones de la forma $x = 1 + y$; $y = 1 + z, \ldots$ seguidas por otras de la forma $v = \dfrac{1}{1+w}$ son equivalentes a dos transformaciones: una del tipo

$$x = a + \frac{1}{y},$$

donde a es un entero positivo, seguida por otra del tipo $y = 1 + z$.

Se deduce de esta observación que cualquier ecuación transformada se obtiene de la propuesta por una serie de transformaciones

$$x = a + \frac{1}{y}\ ;\ y = b + \frac{1}{z}\ ; \ldots ;\ u = l + \frac{1}{v}\ ;\ v = \frac{1}{w},$$

o por las

$$x = \frac{1}{y}\ ;\ y = a + \frac{1}{z}\ ;\ z = b + \frac{1}{t}\ ;\ \ldots\ ;\ u = l + \frac{1}{v}\ ;\ v = \frac{1}{w},$$

siendo $a, b, \ldots, l$ enteros positivos. El segundo caso no difiere del primero puesto que el número de variaciones no se altera por la sustitución $x = \dfrac{1}{y}$. Por el teorema de Vincent, un número suficiente de transformaciones

$$x = a + \frac{1}{y}\ ;\ y = b + \frac{1}{z}\ ; \ldots ;\ u = 1 + \frac{1}{v},$$

conduce a una ecuación con no más de una variación, y una transformación adicional del tipo $v = \dfrac{1}{w}$ no cambia el número de dichas variaciones. Así, es cierto que el proceso antes descripto llevará a ecuaciones con no más de una variación. Estas consideraciones generales se comprenderán mejor por medio de ejemplos a los que pasamos ahora.

Ejemplo 1. Separar las raíces de la ecuación

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

Examinemos primero las raíces positivas. Si 1 no es raíz, las positivas serán mayores o menores que 1.

Las raíces positivas > 1 son de la forma $x = 1 + y$ y las < 1 de la forma $x = \dfrac{1}{1+y}$ con y positivo. Luego, para encontrar el número de raíces positivas > 1 transformamos la ecuación por la sustitución $x = 1 + y$ y buscamos el número de raíces positivas de la ecuación transformada. Solamente se requieren sumas para efectuar esta transformación. En nuestro ejemplo las operaciones necesarias son las que siguen:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & 7 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & \underline{4} & \\ 1 & \underline{3} & & \\ \underline{1} & & & \end{array}$$

así que la ecuación transformada es

$$y^3 + 3y^2 - 4y + 1 = 0$$

y el número de sus raíces positivas puede ser cero o dos. Para efectuar la transformación

$$x = \frac{1}{1+y}$$

hacemos dos pasos. Primero se reemplaza x por $\dfrac{1}{x}$, lo que lleva a

$$7x^3 - 7x^2 + 1 = 0\,.$$

El efecto de esta transformación preliminar es de invertir el orden de los coeficientes. Luego, hacemos $x = 1$ en la nueva ecuación y realizamos las operaciones como se indica:

$$\begin{array}{cccc} 7 & -7 & 0 & 1 \\ \hline 7 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 7 & 7 & \underline{7} & \\ 7 & \underline{14} & & \\ \underline{7} & & & \end{array}$$

La ecuación final transformada es

$$7y^3 + 14y^2 + 7y + 1 = 0\,.$$

En lugar de invertir primero el orden de los coeficientes y luego hacer la sustitución $x = 1 + y$, podemos proceder directamente, comenzando las sumas desde la derecha y siguiendo un orden ascendente, como se indica a continuación:

$$\begin{array}{cccc} & & & \underline{7} \\ & & \underline{14} & 7 \\ & \underline{7} & 7 & 7 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 7 \\ \hline 1 & 0 & -7 & 7 \end{array}$$

Los números subrayados, leídos en orden descendente, proporcionan los coeficientes 7; 14; 7; 1 de la ecuación transformada, por medio de la sustitución

$$x = \frac{1}{1+y}\,.$$

Ambas transformaciones $x = 1 + y$ y $x = \dfrac{1}{1+y}$ pueden practicarse en el mismo esquema con disposición en forma de paralelogramo de números, como se muestra a continuación:

(Léase descendentemente)

$$\begin{array}{rrrr}
 & & & \underline{7} \\
 & & \underline{14} & 7 \\
 & \underline{7} & 7 & 7 \\
\underline{1} & 0 & 0 & 7 \\
\hline
1 & 0 & -7 & 7 \\
\hline
1 & 1 & -6 & \underline{1} \\
1 & 2 & \underline{-4} & \\
1 & \underline{3} & & \\
\underline{1} & & &
\end{array}$$

(Léase ascendentemente).

Desde que la ecuación

$$7\,y^3 + 14\,y^2 + 7\,y + 1 = 0\,,$$

no tiene variaciones, no tiene raíces positivas; luego, la ecuación propuesta no tiene raíces de la forma

$$x = \frac{1}{1+y}$$

con $y > 0$, es decir, no tiene raíces enteras entre 0 y 1. Pero la ecuación

$$y^3 + 3\,y^2 - 4\,y + 1 = 0$$

resultante de la sustitución $x = 1 + y$, tiene dos variaciones y la tenemos que tratar aún mediante las dos sustituciones:

$$y = 1 + z \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{1+z}\,.$$

Los cálculos necesarios se muestran en el esquema en forma de paralelogramo:

(Léase descendentemente)

$$\begin{array}{rrrr}
 & & & \underline{1} \\
 & & \underline{-2} & 1 \\
 & \underline{-2} & -2 & 1 \\
\underline{1} & 0 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 3 & -4 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 0 & \underline{1} \\
1 & 5 & \underline{5} & \\
1 & \underline{0} & & \\
\underline{1} & & &
\end{array}$$

(Léase ascendentemente)

La ecuación resultante de la sustitución $y = 1 + z$

$$z^3 + 6\,z^2 + 5\,z + 1 = 0$$

no tiene variaciones ni raíces positivas, pero la ecuación resultante de la sustitución $y = \dfrac{1}{1+z}$, a saber:

$$z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$$

tiene aún dos variaciones y debe someterse todavía a las transformaciones

$$z = 1 + t \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{1+t}\,\cdot$$

Los cálculos necesarios son:

(Léase descendentemente)

$$\begin{array}{rrrr}
 & & & \underline{1} \\
 & & \underline{1} & 1 \\
 & \underline{-2} & 0 & 1 \\
\underline{-1} & -2 & -1 & 0 \\
\hline
1 & -1 & -2 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -2 & \underline{-1} \\
1 & 1 & \underline{-1} & \\
1 & \underline{2} & & \\
\underline{1} & & &
\end{array}$$

(Léase ascendentemente)

de modo que las ecuaciones transformadas son

$$t^3 + 2t^2 - t - 1 = 0 \quad \text{y} \quad t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

y tienen ambas una sola variación y, por ende, una sola raíz positiva. La primera ecuación resulta de la original por las transformaciones

$$x = 1 + y \quad ; \quad y = \frac{1}{1+z} \quad ; \quad z = 1 + t\,,$$

que pueden resumirse en una:

$$x = 1 + \frac{1}{2+t}\,\cdot$$

Las sustituciones que llevan a la segunda:

$$x = 1 + y \quad ; \quad y = \frac{1}{1+z} \quad ; \quad z = \frac{1}{1+t}\,,$$

también se resumen en una:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+t}}\,\cdot$$

Teniendo cada una de las ecuaciones transformadas una sola variación, hay dos raíces positivas para la ecuación propuesta y los intervalos en los cuales quedan estas raíces se obtienen tomando en las fórmulas que dan x, los valores $t = 0$ y $t = \infty$. Así encontramos dos intervalos

$$\left(1 \;;\; \frac{3}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{2} \;;\; 2\right),$$

cada uno de los cuales contiene una raíz de

$$x^3 - 7x + 7 = 0\,.$$

Las sustituciones sucesivas que sirven para pasar de x a t, se ven inmediatamente si los resultados de las transformaciones aplicadas se disponen en un esquema que se parece a un árbol genealógico:

$$1 \quad 0 \quad -7 \quad 7$$

$$x = (1+y)^{-1} \quad \Big| \quad x = 1 + y$$

7 14 7 1 (sin var.) — 1 3 —4 1 (2 var.)

$$y = (1+z)^{-1} \quad \Big| \quad y = 1 + z$$

1 —1 —2 1 (2 var.) — 1 6 5 1 (sin var.)

$$z = (1+t)^{-1} \quad \Big| \quad z = 1 + t$$

1 1 —2 —1 (1 var.) — 1 2 —1 —1 (1 var.)

A este esquema lo llamaremos de aquí en adelante, « árbol genealógico », para abreviar. Para encontrar el número de raíces negativas es suficiente sustituir x por $-x$; habrá tantas raíces negativas como positivas tenga la ecuación transformada. En nuestro ejemplo, esta transformada

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

tiene una variación y, en consecuencia, una raíz positiva que, poniendo $x = 1, 2, 3 \ldots$ y observando el signo de los resultados, se descubre que está contenida entre 3 y 4. Luego, la ecuación propuesta tiene una raíz negativa en el intervalo $(-4; -3)$.

Ejemplo 2. Separar las raíces de la ecuación

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 = 0 .$$

La ecuación obtenida reemplazando x por $-x$ no tiene variaciones; luego, la ecuación propuesta no tiene raíces negativas. Desde que tiene cuatro variaciones, es necesario comenzar su árbol genealógico haciendo las dos transformaciones:

$$x = 1 + y \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{1+y} \cdot$$

Los cálculos necesarios son como sigue:

9	8	12	0	24
1	—4	12	24	24
1	—3	9	—15	9
1	—2	7	— 8	
1	—1	6		
1	0			
1				

(Léase ascendentemente)

No fué necesario continuar el esquema ascendente, desde que el primer renglón no tiene variaciones, y los coeficientes de la ecuación transformada serían del mismo signo. Como la sucesión

$$1, \ 0, \ 6, \ -8, \ 9$$

tiene dos variaciones, se repite el mismo proceso:

$$\begin{array}{ccccc}
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
8 & 7 & 7 & 1 & 9 \\
\hline
1 & 0 & 6 & -8 & 9 \\
\hline
1 & 1 & 7 & -1 & \underline{8} \\
1 & 2 & 9 & \underline{8} & \\
 & & & \cdot & \\
 & & & \cdot & \\
 & & & \cdot &
\end{array}$$

Ahora ya es inútil continuar hacia arriba o hacia abajo, desde que en ambos casos es evidente que no habrá variaciones. El árbol genealógico es, por lo tanto:

$$1 \quad -4 \quad 12 \quad -24 \quad 24$$

$$x = (1+y)^{-1} \quad \Big| \quad x = 1 + y$$

(sin var.) $\qquad\qquad$ $1 \quad 0 \quad 6 \quad -8 \quad 9$

$$y = (1+z)^{-1} \quad \Big| \quad y = 1 + z$$

(sin var.) $\qquad\qquad$ (sin var.)

Esto significa que, transformando la ecuación dada por cualquiera de las sustituciones

$$x = \frac{1}{1+y} \quad ; \quad x = 2 + z \quad ; \quad x = 1 + \frac{1}{1+z},$$

llegamos a ecuaciones sin variaciones y, por lo tanto, sin raíces positivas. Luego, la ecuación propuesta no tiene raíces reales.

Ejemplo 3. Separar las raíces de la ecuación

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 .$$

Examinamos primero las raíces positivas. Como la ecuación tiene cuatro variaciones, comenzaremos a construir el árbol genealógico como explicamos en los dos ejemplos precedentes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdot & & & & & \\
 & \cdot & & & & & \\
 & \cdot & & & & & \\
 & \underline{1} & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
\underline{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

Sin continuar, vemos que el árbol genealógico es:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$x = (1 + y)^{-1} \quad \Big| \quad x = 1 + y$$

(sin var.) (sin var.)

Luego, no hay raíces positivas. Para investigar las raíces negativas, sustituímos x por $-x$. La ecuación resultante:

$$x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

tiene dos variaciones y, por lo tanto, continuamos como antes:

3	2	3	4	3	2	1
1	—1	—1	1	1	1	1
1	0	—1	0	1	2	3
1	1	0	0	1	3	

y sacamos en conclusión que ninguna de las ecuaciones tiene raíces positivas, de donde se sigue que la ecuación propuesta no tiene raíces negativas. Así, las seis raíces son imaginarias.

Ejemplo 4. Separar las raíces de la ecuación

$$6\,x^7 - 5\,x^6 + 4\,x^5 - 3\,x^4 - 2\,x^2 + 1 = 0$$

1. Investigación de las raíces positivas. Teniendo cuatro variaciones, comenzamos con las transformaciones usuales:

							1
						7	1
					19	6	1
				25	13	5	1
			12	12	8	4	1
		—4	0	4	4	3	1
	—9	—4	—4	0	1	2	1
1	—5	0	—4	—1	—1	1	1
6	—5	4	—3	0	—2	0	1
6	1	5	2	2	0	0	1

Luego, las mismas transformaciones se aplican a la ecuación cuyos coeficientes son, 1, 7, 19, 25, 12, —4, —9, 1:

							1
						—2	1
					—37	—3	1
				—108	—34	—4	1
			—112	— 74	—30	—5	1
		12	— 38	— 44	—25	—6	1
	101	50	6	— 19	—19	—7	1
52	51	44	25	0	—12	—8	1
1	7	19	25	12	— 4	—9	1
1	8	27	52	64	60	51	52

El mismo proceso se repite nuevamente

—93	—94	—92	— 55	53	165	153	52
1	— 2	—37	—108	—112	12	101	52
1	— 1	—38	—146	—258	—246	—145	—93

Puesto que en cada uno de los renglones tenemos una variación, es inútil continuar pues puede verse fácilmente que las ecuaciones transformadas tendrán una variación. El árbol genealógico es el siguiente:

6 —5 4 —3 0 —2 0 1

$x = (1 + y)^{-1}$ | $x = 1 + y$

1 7 19 25 12 —4 —9 1 (2 var.) | (sin var.)

$y = (1 + z)^{-1}$ | $y = 1 + z$

1 —2 —37 —108 —112 12 101 53 (2 var.) | (sin var.)

$z = (1 + t)^{-1}$ | $z = 1 + t$

(1 var.) | (1 var.)

Luego, por las transformaciones

$$x = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + t}} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + t}}}$$

la ecuación propuesta se transforma en ecuaciones con una variación y una raíz positiva. Los intervalos para las correspondientes raíces x se obtienen tomando $t = 0$ y $t = \infty$ y son

$$\left(\frac{2}{3}\,;\,1\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\right)$$

2. Investigación de raíces negativas. Cuando se reemplaza x por $-x$, la ecuación transformada

$$6x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$$

tiene una variación y una raíz positiva, lo que indica una raíz negativa de la ecuación propuesta. Esta tiene tres raíces reales ubicadas en los intervalos:

$$(-\infty\ ;\ 0)\quad ;\quad \left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{2}{3}\right)\quad ;\quad \left(\frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$$

y las cuatro restantes son imaginarias.

El número de operaciones que se requieren para separar las raíces por este método depende de lo cercanas que están las raíces y naturalmente será grande si las hay con pequeñas diferencias entre ellas. Las raíces grandes, digamos > 10, se considerarán « cerca » de ∞ y la separación podrá abreviarse usando sustituciones del tipo

$$x = 10\,(1 + y)\quad ;\quad x = \frac{10}{1 + y}$$

o bien

$$x = 100\,(1 + y)\quad ;\quad x = \frac{100}{1 + y}\ ;\ \text{etc.}$$

Problemas

Separar las raíces de las siguientes ecuaciones:

1. $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0.$

2. $6x^3 - 10x^2 + 5x + 3 = 0.$

3. $x^3 - 9x^2 + 20x + 1 = 0.$

4. $x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$

5. $2x^4 - 6x^3 + x^2 - 10x + 2 = 0.$

6. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0.$

7. $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0.$

8. $x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 4x + 8 = 0.$

9. $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 4x - 2 = 0.$

10. $x^4 + 10x^3 + 23x^2 + 6x - 2 = 0.$

11. $x^5 - 3x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 2 = 0.$

12. $2x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0.$

13. $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4 = 0.$

14. $3x^5 - 7x^4 + x^3 + x^2 - 7x + 5 = 0.$

15. $x^6 - 4x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 3x - 3 = 0.$

16. $2x^6 + 3x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 8x - 7 = 0.$

17. $x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720 = 0.$

18. $x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 3 = 0.$

19. $x^7 - x^5 - 8x^2 + 3 = 0.$

20. $x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 6x^3 - 8x + 1 = 0.$

21. $2x^8 - 3x^7 + 6x^4 - 2x^2 + x - 1 = 0.$

22. $x^8 - 3x^7 + x^6 - x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 3 = 0.$

CAPITULO VII

TEOREMA DE STURM

1. **Polinomios de Sturm.** — Otro método para efectuar la separación de raíces reales se basa en un importante teorema demostrado por C. Sturm (1803-1855) y publicado por él en 1829. Nos permite hallar el número exacto de raíces reales contenidas entre dos números dados, para las ecuaciones sin raíces múltiples. Sea $V = 0$ una ecuación sin raíces múltiples, de modo que el polinomio V no tiene factores repetidos. Partiendo de V es posible, y de muchas maneras, hallar una sucesión de polinomios

$$V\,;\; V_1\,;\; V_2\,\ldots,\, V_s\,, \qquad [1]$$

que en un intervalo dado $(a; b)$, siendo a menor que b, posea las cuatro propiedades siguientes:

1. Cuando x crece de a a b y pasa por una raíz de la ecuación $V = 0$, el cociente $\dfrac{V}{V_1}$ cambia de signo $-$ a $+$.

2. Dos términos consecutivos de la sucesión [1] no se anulan para el mismo valor de x en el intervalo $(a; b)$.

3. Si para un valor de x en este intervalo, un término V_i $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s - 1)$ se anula, los términos V_{i-1} y V_{i+1} para el mismo valor de x tienen signos opuestos.

4. El último término V_s no se anula en el intervalo $(a; b)$ y, por lo tanto, su signo permanece constante al crecer x de a a b.

Cualquier sucesión de polinomios que satisfaga estas cuatro condiciones se llama sucesión de Sturm relativa al intervalo $(a; b)$.

2. **Un método para hallar una sucesión de Sturm.** — Una manera de hallar una sucesión de Sturm relativa al intervalo $(-\infty; \infty)$, y, en consecuencia, relativa también a cualquier otro intervalo, es la siguiente: Como segundo término V_1 de la sucesión de Sturm podemos tomar siempre la derivada V' de V o dicha derivada multiplicada por una constante positiva cualquiera. De esta manera, la condición 1 queda satisfecha. Los otros términos V_2, V_3, ... se determinan por un proceso uniforme, en esencia el mismo que sirve para hallar el máximo común

divisor de V y V_1. El primer paso de este proceso consiste en dividir V por V_1 hasta obtener un resto de grado menor que V_1. Este resto, con los signos de sus coeficientes cambiados, se toma como V_2, de modo que:

$$V = V_1 Q_1 - V_2 ,$$

siendo Q_1 el cociente. Si V_1 no es una constante numérica, el segundo paso consiste en dividir V_1 por V_2 hasta obtener un resto de grado menor que V_2; este resto con signo cambiado se toma como V_3 de modo que:

$$V_1 = V_2 Q_2 - V_3 ,$$

y si V_3 no es constante, se continúa con el mismo procedimiento. En la sucesión de polinomios así obtenida:

$$V_2, V_3, \ldots$$

tendremos necesariamente un polinomio V_s que es una constante distinta de cero, puesto que el polinomio V no tiene factores repetidos y, por lo tanto, V y V' no pueden tener divisores que no sean constantes. Es fácil ver ahora que la sucesión

$$V, V_1, V_2, \ldots, V_s,$$

es una sucesión de Sturm. La primera propiedad queda asegurada al elegir $V_1 = V'$. Para comprobar que se cumple la segunda propiedad, notamos que, en general:

$$V_{i-1} = V_i Q_i - V_{i+1} .$$

Suponiendo ahora que para un valor real $x = \xi$

$$V_i(\xi) = 0 \quad ; \quad V_{i+1}(\xi) = 0 ,$$

será también $V_{i-1}(\xi) = 0$; en la misma forma, $V_{i-2}(\xi) = 0$ y así siguiendo será finalmente: $V_1(\xi) = V'(\xi) = 0$ y $V(\xi) = 0$. Pero esto es imposible puesto que implicaría que ξ fuera una raíz múltiple de V. Ahora, si para $x = \xi$

$$V_i(\xi) = 0 ,$$

entonces

$$V_{i-1}(\xi) = -V_{i+1}(\xi) ,$$

lo cual prueba que los números

$$V_{i-1}(\xi) \quad \text{y} \quad V_{i+1}(\xi) ,$$

son distintos de cero y tienen signo contrario, de modo que también se cumple la tercera propiedad. Finalmente, la cuarta propiedad se cumple porque V_s es una constante distinta de cero.

Teóricamente, por lo tanto, es siempre posible hallar al menos una sucesión de Sturm relativa a un intervalo cualquiera, aunque en un caso dado, y especialmente cuando el grado de V es algo elevado, los cálculos pueden dar números grandes. Para evitar la aparición de fracciones conviene tener presente que, multiplicando los miembros de una sucesión de Sturm por factores positivos arbitrarios, obtenemos otra sucesión de Sturm. La introducción de factores positivos apropiados para eliminar fracciones puede hacerse durante la división multiplicando los coeficientes de cada resto parcial por factores positivos apropiados. El efecto de estas operaciones sobre el resto final es simplemente que éste resulte multiplicado por un factoı positivo. Si al hallar la sucesión de Sturm se llega a un término, V_m por ejemplo, que no tiene raíces reales, o las tiene, pero fuera del intervalo $(a; b)$ al que nos referimos, podemos finalizar la sucesión con V_m puesto que los términos de la sucesión truncada

$$V\ ;\ V_1\ ;\ V_2\ ;\ \ldots\ ;\ V_m\,,$$

relativa al intervalo $(a; b)$ cumplen todas las propiedades 1, 2, 3 y 4. Tal simplificación ocurre, por ejemplo, cuando V_m es de segundo grado y tiene raíces imaginarias, circunstancia que puede verificarse casi siempre a simple vista.

Ejemplo 1. Sea

$$V = x^3 - 7\,x + 7$$

Será

$$V_1 = V' = 3\,x^2 - 7$$

y para continuar tenemos que dividir V por V_1; pero, para evitar las fracciones, es conveniente multiplicar V por 3 y efectuar la división así:

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
3 & 0 & -21 & 21 & 3 & 0 & -7 \\ \cline{5-7}
3 & 0 & -7 & & 1 & & \\ \cline{1-4}
 & & -14 & 21 & & &
\end{array}$$

Por consiguiente, el resto es: $-14\,x + 21$. Cambiando el signo y suprimiendo el factor común positivo 7, podemos tomar:

$$V_2 = 2\,x - 3.$$

Dividimos ahora $3\,x^2 - 7$ por $2\,x - 3$ en la forma indicada:

$$\begin{array}{lrrr|rr}
\text{Multiplicamos por 2:} & 3 & 0 & -7 & 2 & -3 \\ \cline{5-6}
 & 6 & 0 & -14 & 3 & 9 \\
 & 6 & -9 & & & \\ \cline{2-4}
\text{Multiplicamos por 2:} & & 9 & -14 & & \\
 & & 18 & -28 & & \\
 & & 18 & -27 & & \\ \cline{3-4}
 & & & -1. & &
\end{array}$$

Cambiando el signo del resto, tomamos

$$V_3 = +1,$$

y así tenemos la sucesión de Sturm para la ecuación $V = 0$

$$\begin{aligned} V &= x^3 - 7x + 7 \\ V_1 &= 3x^2 - 7 \\ V_2 &= 2x - 3 \\ V_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Nótese que los números escritos en lugar de los coeficientes del cociente, difieren de ellos. Pero esto no tiene importancia, puesto que sólo nos interesan los restos o éstos multiplicados por factores positivos.

Ejemplo 2. Sea

$$V = x^4 - 6x^3 + x^2 - 1.$$

Podemos tomar:

$$V_1 = \frac{1}{2}V' = 2x^3 - 9x^2 + x.$$

Se halla V_2 en la forma antedicha

$$\begin{array}{lrrrrr|rrrr}
 & 2 & -12 & 2 & 0 & -2 & 2 & -9 & 1 & 0 \\ \cline{7-10}
 & 2 & -9 & 1 & 0 & & 1 & -3 & & \\ \cline{2-6}
\text{Multiplicamos por 2:} & & -3 & 1 & 0 & -2 & & & & \\
 & & -6 & 2 & 0 & -4 & & & & \\
 & & -6 & 27 & -3 & 0 & & & & \\ \cline{2-6}
 & & -25 & 3 & -4 & & & & &
\end{array}$$

Por lo tanto

$$V_2 = 25x^2 - 3x + 4.$$

Por ser imaginarias las raíces de este polinomio, no es necesario continuar, de modo que en este ejemplo la sucesión de Sturm consta de tres términos:

$$\begin{aligned} V &= x^4 - 6x^3 + x^2 - 1 \\ V_1 &= 2x^3 - 9x^2 + x \\ V_2 &= 25x^2 - 3x + 4. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Sea

$$V = x^5 - 10x^4 + 15x^3 - x^2 + 3x - 7.$$

Tomamos:

$$V_1 = V' = 5x^4 - 40x^3 + 45x^2 - 2x + 3,$$

y buscamos V_2 en la forma antedicha:

$$\begin{array}{rrrrrr|rrrrr}
5 & -50 & 75 & -5 & 15 & -35 & 5 & -40 & 45 & -2 & 3 \\ \cline{7-11}
5 & -40 & 45 & -2 & 3 & & 1 & -2 & & & \\ \cline{1-6}
 & -10 & 30 & -3 & 12 & -35 & & & & & \\
 & -10 & 80 & -90 & 4 & -6 & & & & & \\ \cline{2-6}
 & & -50 & 87 & 8 & -29 & & & & &
\end{array}$$

por lo tanto

$$V_2 = 50\,x^3 - 87\,x^2 - 8\,x + 29.$$

Antes de continuar con la división siguiente, se multiplican todos los coeficientes de V_1 por 10:

	50	—400	450	— 20	30	50	— 87	—8	29
	50	— 87	— 8	29		1	—313		
Multiplicamos por 50:		— 313	458	— 49	30				
		—15650	22900	—2450	1500				
		—15650	27231	2504	—9077				
			—4331	—4954	10577				

por lo tanto

$$V_3 = 4331\,x^2 + 4954\,x - 10577.$$

Las raíces de este polinomio son reales y en consecuencia, es necesario continuar; pero como los números se hacen muy grandes (por haber multiplicado V_2 por 200), es preferible hallar los coeficientes del resto en forma aproximada, manteniendo cuatro decimales en los coeficientes del cociente. El cálculo completo, hecho con ayuda de una máquina de calcular, es el siguiente:

10000	—17400	— 1600	5800	4331	4954	—10577
10000	11438	—24421		2,3089	—3,6585	
	—28838	22821	5800			
	—28838	—32986	70427			
		55807	—64627 ,			

por lo tanto será, aproximadamente:

$$V_4 = -5580{,}7\,x + 6462{,}7.$$

Finalmente, se divide V_3 por V_4 también aproximadamente

4331	4954	—10577	—5580,7	6462,7
4331	—5016		— 0,7761	—1,7865
	9970	—10577		
	9970	—11546		
		+969 ,		

de donde se deduce que V_5 es una constante negativa, de modo que podemos tomar $V_5 = -1$. La sucesión de Sturm es:

$$\begin{aligned}
V &= x^5 - 10\,x^4 + 15\,x^3 - x^2 + 3\,x - 7\,,\\
V_1 &= 5\,x^4 - 40\,x^3 + 45\,x^2 - 2\,x + 3\,,\\
V_2 &= 50\,x^3 - 87\,x^2 - 8\,x + 29\,,\\
V_3 &= 4331\,x^2 + 4954\,x - 10577\,,\\
V_4 &= -5580{,}7\,x + 6462{,}7\,,\\
V_5 &= -1\,.
\end{aligned}$$

La aparición de números muy grandes al formar una sucesión de Sturm es una desventaja práctica del método de Sturm para la separación de raíces; pero este inconveniente puede evitarse recurriendo a las aproximaciones, como en el ejemplo anterior, puesto que sólo nos interesan los signos de las funciones de Sturm para algunos valores particulares de x y bastan para este propósito aun coeficientes con poca aproximación.

3. **Teorema de Sturm.** — Supongamos que

$$V,\ V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_s,$$

es una sucesión de polinomios de Sturm relativa a un intervalo dado $(a; b)$. Sea ξ un número perteneciente a $(a; b)$ y supongamos que se sustituye $x = \xi$ en todas las funciones de Sturm. Obtenemos los números

$$V(\xi),\ V_1(\xi),\ V_2(\xi),\ \ldots,\ V_s(\xi),$$

el último de los cuales es distinto de cero. Supongamos también que el primero, $V(\xi)$, no es nulo y nos despreocupamos de los valores intermedios, que puedan ser iguales a cero. Reemplazando los restantes por los signos $+$ ó $-$ según sean positivos o negativos, obtenemos una sucesión de signos $+$ ó $-$ en la cual contamos el número de variaciones. Este número de variaciones $v(\xi)$ se llama número de variaciones en la sucesión de Sturm para $x = \xi$ y puede considerarse como una función de ξ definida para todos los valores de ξ en el intervalo $(a; b)$, exceptuadas las raíces de la ecuación $V = 0$ que pueden encontrarse en ese intervalo. Luego de estas explicaciones preliminares el famoso teorema a que nos referimos puede ser enunciado de la siguiente manera:

Teorema de Sturm: Suponiendo que ni a ni b sean raíces de la ecuación $V(x) = 0$, el número de ellas contenidas entre a y b es igual a la diferencia

$$v(a) - v(b),$$

o bien al número de variaciones perdidas por la sucesión de Sturm cuando x pasa de a a b.

Demostración: Podemos suponer por ahora que ninguno de los números

$$V(a),\ V_1(a),\ \ldots,\ V_{s-1}(a)$$
$$V(b),\ V_1(b),\ \ldots,\ V_{s-1}(b),$$

sea cero. Sean

$$c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_m,$$

las raíces reales de todas las ecuaciones

$$V(x) = 0\ ;\ V_1(x) = 0\ ;\ \ldots\ ;\ V_{s-1}(x) = 0,$$

que se encuentran en el intervalo $(a; b)$, ordenadas de acuerdo a su magnitud, de modo que $c_1 > a$ y $c_m < b$. Entre c_1 y c_2; c_2 y c_3; ... ;

c_{m-1} y c_m elijamos arbitrariamente los números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1}$ de modo que:

$$c_1 < \xi_1 < c_2 < \xi_2 < c_3 < \ldots < c_{m-1} < \xi_{m-1} < c_m.$$

Podemos escribir, entonces:

$$v(a) - v(b) = [v(a) - v(\xi_1)] + [v(\xi_1) - v(\xi_2)] + \ldots + \\ + [v(\xi_{m-1}) - v(b)]$$

o, más brevemente:

$$v(a) - v(b) = \sum_{i=1}^{m} [v(\xi_{i-1}) - v(\xi_i)],$$

tomando para uniformar, $\xi_0 = a$, $\xi_m = b$. Nótese que entre ξ_{i-1} y ξ_i hay sólo uno de los números $c_1, c_2, \ldots$, a saber, c_i, de modo que:

$$\xi_{i-1} < c_i < \xi_i.$$

Este número c_i es una raíz de una o más de una, de las funciones $V(x)$, $V_1(x), \ldots, V_{s-1}(x)$. Supongamos primero que no es una raíz de la primera de ellas, $V(x)$, pero lo es de

$$V_\alpha(x), \; V_\beta(x), \; \ldots, \; V_\kappa(x), \; V_\lambda(x),$$

donde, por la segunda propiedad de la sucesión de Sturm: $\beta > \alpha + 1$; $\gamma > \beta + 1$; ... $\lambda > \kappa + 1$ y $\lambda < s$ por la cuarta propiedad. Para comparar $v(\xi_{i-1})$ y $v(\xi_i)$ la totalidad de los polinomios de Sturm se divide de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} V, \; V_1, \qquad\qquad \ldots, V_{\alpha-1}, \; V_\alpha, \; V_{\alpha+1} \\ V_{\alpha+1}, \; V_{\alpha+2}, \; \ldots, V_{\beta-1}, \; V_\beta, \; V_{\beta+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{\kappa+1}, \; V_{\kappa+2}, \; \ldots, V_{\lambda-1}, \; V_\lambda, \; V_{\lambda+1} \\ V_{\lambda+1}, \qquad\qquad \ldots, V_s \end{array}$$

Los términos $V, V_1, \ldots, V_{\alpha-1}$, no teniendo raíces en el intervalo (ξ_{i-1}, ξ_i), tienen el mismo signo para $x = \xi_{i-1}$ y $x = \xi_i$. Por esta razón, el número de variaciones en las sucesiones

$$V(\xi_{i-1}), \; V_1(\xi_{i-1}), \; \ldots, \; V_{\alpha-1}(\xi_{i-1})$$

y

$$V(\xi_i), \; V_1(\xi_i), \; \ldots, \; V_{\alpha-1}(\xi_i),$$

es el mismo; llamémosle A. En cuanto a

$$V_{\alpha-1}(x), \; V_\alpha(x), \; V_{\alpha+1}(x),$$

tienen una variación para $x = \xi_{i-1}$ y una para $x = \xi_i$. En efecto, los signos de

$$V_{\alpha-1}(\xi_{i-1}),\ V_{\alpha-1}(c_i),\ V_{\alpha-1}(\xi_i),$$

son los mismos. En la misma forma:

$$V_{\alpha+1}(\xi_i)\quad,\quad V_{\alpha+1}(c_i)\quad,\quad V_{\alpha+1}(\xi_i),$$

tienen el mismo signo, pero $V_{\alpha-1}(c_i)$ y $V_{\alpha+1}(c_i)$ tienen signos opuestos por la tercera propiedad, puesto que $V_\alpha(c_i) = 0$. Sea, por ejemplo, $+$ el signo de $V_{\alpha-1}(c_i)$ y $-$ el de $V_{\alpha+1}(c_i)$. Quedan entonces, sólo las siguientes posibilidades con respecto a los signos de

$$\begin{array}{ccc} V_{\alpha-1}(\xi_{i-1}) & , \quad V_\alpha(\xi_{i-1}) & , \quad V_{\alpha+1}(\xi_{i-1}) \\ + & + & - \\ + & - & - \end{array}$$

que en ambos casos, da una sola variación. En la misma forma, los signos de

$$V_{\alpha-1}(\xi)\quad,\quad V_\alpha(\xi_i)\quad,\quad V_{\alpha+1}(\xi_i),$$

sólo pueden ser los siguientes:

$$\begin{array}{ccc} + & + & - \\ + & - & - \end{array}$$

lo que también nos da una sola variación. Luego, la primera sección presenta, tanto para $x = \xi_{i-1}$ como para $x = \xi_i$, el mismo número de variaciones $A + 1$. Lo que se comprobó para la primera sección es igualmente aplicable a las otras secciones; en consecuencia, se llega a que:

$$v(\xi_{i-1}) - v(\xi_i) = 0,$$

si es $V(c_i) \neq 0$.

Supongamos ahora que $V(c_i) = 0$. Igual que antes puede probarse que para $x = \xi_{i-1}$ y $x = \xi_i$ la sucesión

$$V_1(x)\quad,\quad V_2(x),\ \ldots,\ V_s(x),$$

presenta el mismo número de variaciones, puesto que $V_1(c_i) \neq 0$. En cuanto a la sección

$$V(x)\ ,\ V_1(x),$$

tiene por la misma propiedad, una variación para $x = \xi_{i-1}$ y ninguna variación para $x = \xi_i$ y por lo tanto, si c_i es una raíz de la ecuación $V(x) = 0$

$$v(\xi_{i-1}) - v(\xi_i) = 1.$$

La suma

$$\sum_{i=1}^{m}[v(\xi_{i-1}) - v(\xi_i)],$$

consta de tantos términos iguales a 1 como raíces tenga la ecuación $V(x) = 0$ entre a y b, siendo los demás términos iguales a cero. Pero esta suma es:

$$v(a) - v(b),$$

con lo que queda demostrado el teorema en el caso en que ningún término de la sucesión de Sturm se anule para $x = a$ o $x = b$. Queda por eliminar esta restricción suponiendo, sin embargo, que $V(a) \neq 0$, $V(b) \neq 0$. Para un ε positivo suficientemente pequeño, el número de raíces de $V(x) = 0$ entre a y b es el mismo que el número de raíces entre $a + \varepsilon$ y $b - \varepsilon$, y puesto que ningún término de la sucesión de Sturm se anula para $x = a + \varepsilon$ o para $x = b - \varepsilon$, el número pedido de raíces es:

$$v(a + \varepsilon) - v(b - \varepsilon).$$

Supongamos ahora que $V_\alpha(a) = 0$; contando entonces el número de variaciones en la sección

$$V_{\alpha-1}(a) \quad , \quad V_\alpha(a) \quad , \quad V_{\alpha+1}(a),$$

nos despreocupamos del término intermedio 0; siendo los términos de los extremos de signos opuestos, sólo se hallará una variación. De la misma manera, cualquiera sea el signo de $V_\alpha(a + \varepsilon)$, la sección

$$V_{\alpha-1}(a + \varepsilon) \quad ; \quad V_\alpha(a + \varepsilon) \quad ; \quad V_{\alpha+1}(a + \varepsilon),$$

presenta una sola variación, y de estas observaciones se desprende que $v(a) = v(a + \varepsilon)$; en la misma forma puede probarse que $v(b) = v(b - \varepsilon)$. Por consiguiente, el número de raíces de V contenidas entre a y b está dado siempre por

$$v(a) - v(b),$$

siempre que a y b no se encuentren entre las raíces.

4. **Ejemplos.** — Unos pocos ejemplos bastarán para mostrar cómo puede usarse el teorema de Sturm para la separación de raíces.

Ejemplo 1. Separar las raíces de la ecuación

$$V = x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Las funciones de Sturm son, en este caso:

$$\begin{aligned} V &= x^3 - 7x + 7, \\ V_1 &= 3x^2 - 7, \\ V_2 &= 2x - 3, \\ V_3 &= 1. \end{aligned}$$

Sustituyendo x por los enteros 0, 1, 2, ... y -1, -2,... formamos la siguiente tabla de los signos de los polinomios de Sturm:

x	V	V_1	V_2	V_3	
2	+	+	+	+	2 variaciones perdidas
1	+	—	—	+	
0	+	—	—	+	
—1	+	—	—	+	
—2	+	+	—	+	
—3	+	+	—	+	1 variación perdida
—4	—	+	—	+	

Se ve a simple vista que hay una raíz entre -4 y -3 y dos raíces entre 1 y 2. Para separarlas, el intervalo (1; 2) debe ser subdividido intercalando algún número intermedio, por ejemplo $\frac{3}{2}$. Los signos que corresponden a $x = 1;\ \frac{3}{2}$; 2 son

x	V	V_1	V_2	V_3	
2	+	+	+	+	0 var.
3/2	—	—	0	+	1 var.
1	+	—	—	+	2 var.

Por consiguiente, hay una raíz entre 1 y $\frac{3}{2}$ y una raíz entre $\frac{3}{2}$ y 2. Las raíces están ahora separadas y se encuentran en los intervalos

$$(-4; -3) \quad ; \quad \left(1;\ \frac{3}{2}\right) \quad ; \quad \left(\frac{3}{2};\ 2\right).$$

Ejemplo 2. Separar las raíces de la ecuación

$$V = x^4 - 6x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

En este caso los polinomios de Sturm son

$$V = x^4 - 6x^3 + x^2 - 1\,,$$
$$V_1 = 2x^3 - 9x^2 + x\,,$$
$$V_2 = 25x^2 - 3x + 4\,,$$

y la tabla siguiente da sus signos para varios valores de x:

x	V	V_1	V_2	
6	+	+	+	1 var.
5	—	+	+	
0	—	0	+	1 var.
—1	+	—	+	

Observando los signos vemos que hay una raíz entre 5 y 6 y una raíz entre -1 y 0. Las otras dos raíces son imaginarias.

Ejemplo 3. Para demostrar que una elección adecuada de los polinomios de Sturm puede facilitar la investigación de la naturaleza de las raíces, consideremos la ecuación:

$$f = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a\,(a+1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{a\,(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n}x^n = 0.$$

Derivando y multiplicando por $1-x$, obtenemos:

$$(1-x)\,f' = af - \frac{a\,(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n}\,(a+n)\,x^n.$$

La verificación de esta identidad es directa y no presenta ninguna dificultad. Si tomamos ahora

$$V = f\ ,\ V_1 = f'\ ,\ V_2 = -\frac{a\,(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n}\,(a+n)\,x^n\,,$$

y suponemos que a no es ni cero ni un entero negativo mayor o igual a $-n$, puede verificarse inmediatamente que estos tres polinomios forman una sucesión de Sturm para cada uno de los intervalos $(\varepsilon;\ +\infty)$ y $(-\infty;\ -\varepsilon)$, siendo ε un número positivo arbitrario tan pequeño como se quiera; y así podremos hallar exactamente el número de raíces positivas o negativas de la ecuación propuesta mediante el teorema de Sturm. Supongamos primero que a es un número positivo o un número negativo $< -n$. Sustituyendo $x = \varepsilon$; $x = +\infty$ y $x = -\infty$; $x = -\varepsilon$ y suponiendo que n es par, tenemos:

$a > 0$

x	V	V_1	V_2
$+\infty$	+	+	−
ε	+	+	−
$-\varepsilon$	+	+	−
$-\infty$	+	−	−

$a < -n$

x	V	V_1	V_2
$+\infty$	+	−	+
ε	+	−	+
$-\varepsilon$	+	−	+
$-\infty$	+	−	+

y puesto que no se pierden variaciones en los intervalos $(-\infty;\ -\varepsilon)$ y $(\varepsilon;\ +\infty)$ la ecuación propuesta sólo tiene raíces imaginarias.

En el caso de que n sea impar los resultados son:

$a > 0$

x	V	V_1	V_2
$+\infty$	+	+	−
ε	+	+	−
$-\varepsilon$	+	+	+
$-\infty$	−	+	+

$a < -n$

x	V	V_1	V_2
$+\infty$	−	−	−
ε	+	−	−
$-\varepsilon$	+	−	+
$-\infty$	+	−	+

Examinándolos vemos que en el caso de que sea $a > 0$ sólo se pierde una variación en el intervalo $(-\infty;\ -\varepsilon)$, lo que indica que hay una raíz real negativa, mientras que si $a < -n$ se pierde una variación en el intervalo $(\varepsilon;\ +\infty)$, lo que demuestra la exis-

tencia de una raíz positiva. En la misma forma, en los casos en que $a > 0$ y $a < -n$ la ecuación no tiene raíces reales si n es par, y una raíz real si n es impar. Si a es negativo y se encuentra entre dos enteros consecutivos $-k$ y $-k+1$ y $k \leqq n$, el examen de la naturaleza de las raíces puede hacerse de manera análoga y conduce al siguiente resultado: para n par hay dos raíces reales; para n impar el número de raíces reales es uno o tres, según que k sea impar o par.

Problemas

Separar las raíces por medio del teorema de Sturm.

1. $x^3 - 3x + 1 = 0.$

2. $x^3 + 6x^2 + 10x - 1 = 0.$

3. $x^3 - 4x + 2 = 0.$

4. $x^3 - 6x^2 + 8x + 40 = 0.$

5. $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$

6. $x^3 - 4x^2 - 4x + 20 = 0.$

7. $6x^4 - 24x^3 + 42x^2 - 32x + 11 = 0.$

8. $16x^4 - 32x^3 + 88x^2 - 8x + 17 = 0.$

9. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 8x + 3 = 0,$

10. $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 12x + 5 = 0.$

11. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0.$

12. $x^4 - 4x^3 + x^2 - 1 = 0.$

13. $x^4 + x^3 + x - 1 = 0.$

14. $x^4 + 2x^2 - 4x + 10 = 0.$

15. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 5x^2 + 1 = 0.$

16. $x^5 + 5x^4 - 20x^2 - 10x + 2 = 0.$

17. $x^5 - 2x^4 + x^3 - 8x + 6 = 0.$

18. $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 24x + 14 = 0.$

19. $x^6 - 6x^5 + 16x^4 - 24x^3 + 22x^2 - 12x + 4 = 0.$

20. $5x^6 - 30x^5 + 75x^4 - 90x^3 + 60x^2 - 18x - 2 = 0.$

*** 21.** La sucesión de Sturm para cada uno de los intervalos $(\varepsilon; +\infty)$ y $(-\infty; -\varepsilon)$ en los que ε es un número positivo arbitrario, puede obtenerse de la siguiente manera, supuesto que $f(x)$ no tiene factores múltiples: Se ordena $f(x)$ y los demás polinomios que se usarán, según potencias crecientes de x. Sea x^{ρ_1} la máxima potencia de x que divide a $f'(x)$ de modo que:

$$f'(x) = x^{\rho_1} f_1(x) \qquad \rho_1 \geqq 0$$

y $f_1(0) \neq 0$. Divídase $f(x)$ por $f_1(x)$ de grado $n_1 = n - 1 - \rho_1$, conservando en el cociente exactamente $n - n_1 + 1$ términos. El resto será divisible, evidentemente, por

$$x^{n-n_1+1}$$

pero puede ser divisible ocasionalmente por una potencia mayor de x, por ejemplo x^{ρ_2}, de modo que $\rho_2 \geqq n - n_1 + 1$. Representando este resto por

$$-x^{\rho_2} f_2(x)\,, \qquad f_2(0) \neq 0,$$

tendremos idénticamente

$$f(x) = f_1(x)\, q_1(x) - x^{\rho_2} f_2(x),$$

y el grado de $f_2(x)$ será $n_2 \leqq n - \rho_2 \leqq n_1 - 1$, es decir, menor que el de $f_1(x)$. Si $f_2(x)$ no es una constante, dividimos en la misma forma $f_1(x)$ por $f_2(x)$, conservando en el

cociente exactamente $n_1 - n_2 + 1$ términos. El resto será divisible por $x^{n_1-n_2+1}$; representándolo por

$$-x^{\rho_3} f_3(x), \qquad \rho_3 \geqq n_1 - n_2 + 1, \qquad f_3(0) \neq 0,$$

tendremos

$$f_1(x) = f_2(x)\, q(x) - x^{\rho_3} f_3(x).$$

La continuación de este proceso conduce a una sucesión de polinomios

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_s,$$

el último de los cuales es una constante distinta de cero. Demostrar que

$$V = f, \qquad V_1 = f_1, \qquad \ldots, \qquad V_s = f_s,$$

es una sucesión de Sturm para el intervalo $(\varepsilon; +\infty)$. Eligiendo el signo $+$ ó $-$ de acuerdo a que ρ_i sea par o impar y haciendo

$$V = f, \qquad V_i = \pm f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

demostrar que

$$V, V_1, \ldots, V_s,$$

es una sucesión de Sturm para el intervalo $(-\infty; -\varepsilon)$. Para evitar las fracciones está permitido multiplicar los restos por factores positivos convenientemente elegidos.

Aplíquese este procedimiento en la separación de las raíces de las ecuaciones:

*** 22.** $x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$

*** 23.** $x^4 - 4x^3 + x^2 - 1 = 0.$

*** 24.** $x^4 + x^3 + x - 1 = 0.$

*** 25.** $x^5 + x^4 + 2x^3 - 1 = 0.$

*** 26.** Demostrar que una ecuación $V = 0$ de grado n tiene todas sus raíces reales y distintas si y solamente si la sucesión de Sturm consta de n funciones con primeros coeficientes del mismo signo. Aplíquese este criterio a la ecuación cúbica $x^3 + px + q = 0$.

*** 27.** ¿Cuál es la condición para que todas las raíces de la siguiente ecuación sean reales?

$$x^4 - 5px^3 + 5p^2 x + 2q = 0\,?$$

*** 28.** Investíguese la naturaleza de las raíces de la ecuación:

$$V = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} = 0.$$

Nótese que

$$V - V' = \frac{x^n}{1.2\ldots n},$$

y demuéstrese que

$$V, \qquad V', \qquad -x^n.$$

forman una sucesión de Sturm en cada uno de los intervalos $(\varepsilon; +\infty)$ y $(-\infty; \varepsilon)$ siendo ε un número positivo arbitrario.

*** 29.** Si las funciones

$$V, V_1, \ldots, V_s,$$

satisfacen las condiciones 2, 3 y 4 enumeradas en el párrafo 1, pero no la condición 1, ¿qué representa la diferencia $v(a) - v(b)$?

*** 30.** Si se satisfacen las condiciones 2, 3 y 4 y $v(-\infty) - v(+\infty) = n$, siendo n el grado de la ecuación $V = 0$, demostrar que todas las raíces de la ecuación son reales y distintas.

*** 31.** Considerar los polinomios de Hermite $H_n = H_n(x)$, definidos por la expresión

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2} H_n .$$

Demostrar que

$$H_{n+1} + 2\,x\,H_n + 2\,n\,H_{n-1} = 0,$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, suponiendo que $H_0 = 1$. Refiriéndose al Problema 30, demostrar que todas las raíces de la ecuación $H_n = 0$ son reales y distintas.

Sugestión: Si $y = e^{-x^2}$, entonces

$$y' + 2\,xy = 0.$$

Hallar la derivada de orden n.

*** 32.** Sea

$$\frac{d^{n+1}\, e^{\frac{1}{x}}}{dx^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n+2}}\, P_n(x)\, e^{\frac{1}{x}},$$

donde $P_n = P_n(x)$ es un polinomio de grado n. Demostrar que:

$$P_{n+1} - [(2\,n + 2)\,x + 1]\,P_n + n\,(n + 1)\,x^2 P_{n-1} = 0;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Concluir luego por inducción que el primer coeficiente de P_n es $1, 2, 3, \ldots, n$ y que $P_n(0) = 1$. Refiriéndose del Problema 30, deducir que todas las raíces de la ecuación $P_n(x) = 0$ son reales, negativas y distintas.

*** 33.** Sean las partes imaginarias de los números complejos $a_1 + b_1 i$; $a_2 + b_2 i$; $\ldots$ $\ldots$; $a_n + b_n i$ del mismo signo; por ejemplo, todas positivas. Sea

$$(x - a_1 - b_1 i)\,(x - a_2 - b_2 i)\,\ldots\,(x - a_n - b_n i) = P_n(x) + i\,Q_n(x),$$

siendo $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ polinomios reales. Demostrar que las raíces de la ecuación

$$\alpha P_n + \beta Q_n = 0,$$

son reales para α y β reales y arbitrarios. *Guía para la solución*: Sea

$$V_k = \alpha\,P_k + \beta\,Q_k \text{ y } V_0 = \alpha. \text{ Demostrar que}$$

$$V_k = \left[x - a_k + \frac{b_k}{b_k - 1}\,(x - a_{k-1})\right] V_{k-1} - \left[\frac{b_k}{b_{k-1}}\,(x - a_{k-1})^2 + b_k\,b_{k-1}\right] V_{k-2},$$

para $k = 2, 3, \ldots, n$. Referirlo al problema 30. Este problema puede resolverse también por consideraciones geométricas muy simples.

CAPITULO VIII

CALCULO APROXIMADO DE LAS RAICES

1. **Objeto de este capítulo.** — Luego de efectuada la separación de una raíz real, se presenta una nueva cuestión: ¿cómo calcular esta raíz con un grado de aproximación deseado? Los valores aproximados de los números se representan ordinariamente por cifras decimales, y por lo tanto el problema de aproximar las raíces puede plantearse de esta manera: calcular con un número de cifras decimales preestablecido la raíz separada. Para arribar a tal objetivo pueden emplearse varios métodos. En este capítulo consideraremos los tres métodos principales: el método de Horner, el de iteración y el de Newton. El de Horner se aplica únicamente a ecuaciones algebraicas, mientras que los otros dos tienen la ventaja de ser aplicables también a las ecuaciones trascendentes. En cambio, en su utilización en las ecuaciones algebraicas, el método de Horner tiene ventajas definitivas con respecto al de Newton y al de iteración: primero, en el método de Horner los cálculos necesarios se disponen de una manera muy conveniente y segundo, la raíz puede computarse con un mayor número de cifras decimales con una misma cantidad de trabajo.

2. **Parte básica del método de Horner.** — Las características esenciales del método de Horner se entenderán mejor en su aplicación a ejemplos concretos.

Ejemplo 1. Tomemos la ecuación

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

ya vista en el Capítulo VI, Párrafo 12. Tiene tres raíces reales: dos positivas en los intervalos $(1; {}^3/_2)$ y $({}^3/_2; 2)$ y una raíz negativa entre -4 y -3. Supóngase que deseamos calcular aproximadamente la raíz contenida entre ${}^3/_2 = 1{,}5$ y 2. Desde que la parte entera es 1, podemos poner:

$$x = 1 + \frac{a}{10}$$

donde a es un número contenido entre 5 y 10. La ecuación transformada en a puede obtenerse en dos pasos: primero ponemos

$$x = 1 + x'$$

y luego

$$x' = \frac{a}{10} \cdot$$

La ecuación transformada en x' se encuentra mediante la regla de Horner, inventada por él precisamente en conexión con el cálculo aproximado de las raíces. En nuestro caso los cálculos necesarios se disponen como sigue:

$$\begin{array}{llccc}
1) & 1 & 0 & -7 & 7 \\
 & & 1 & 1 & -6 \\
\hline
 & & 1 & -6 & \underline{1} \\
 & & 1 & 2 & \\
\cline{3-4}
 & & 2 & \underline{-4} & \\
 & & 1 & & \\
\cline{3-3}
 & & \underline{3} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array} \qquad [I]$$

y los números subrayados son los coeficientes de la ecuación en x':

$$x'^3 + 3\,x'^2 - 4\,x' + 1 = 0.$$

Aquí debemos sustituir

$$x' = \frac{a}{10}.$$

Eliminando denominadores, la ecuación resultante en a será:

$$a^3 + 30\,a^2 - 400\,a + 1000 = 0 \qquad [1]$$

y sus coeficientes se obtienen multiplicando los números 1; 3; -4; 1 del Esquema [I] por 1; 10; 10^2; 10^3. La raíz de la ecuación [1] se sabe que está contenida entre 5 y 10. Para determinar la parte entera de a debemos buscar dos enteros consecutivos entre los que esté contenida a. Con este fin sustituímos sucesivamente en el primer miembro de [1], $a = 5$; 6; 7; 8; 9 y observamos los dos enteros sucesivos que dan resultados de signos opuestos. El menor de ellos será la parte entera buscada de a. Encontramos que para

$$a = 5;\ 6;\ 7.$$

los signos de los resultados son

$$- \quad - \quad +.$$

Por lo tanto:

$$6 < a < 7$$

y podemos escribir

$$a = 6 + \frac{b}{10},$$

donde b está contenido entre 0 y 10. La ecuación transformada en b se encuentra por una nueva aplicación de la regla de Horner, como sigue:

$$\begin{array}{llrrr}
6) & 1 & 30 & -400 & 1000 \\
 & & 6 & 216 & -1104 \\
\hline
 & & 36 & -184 & \underline{-104}000 \\
 & & 6 & 252 & \\
\hline
 & & 42 & \underline{68}00 & \\
 & & 6 & & \\
\hline
 & & \underline{4}80 & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array} \qquad [II]$$

La ecuación en b es:

$$b^3 + 480\, b^2 + 6800\, b^3 - 104000 = 0. \qquad [2]$$

Para encontrar la parte entera de b sustituímos en el primer miembro de [2]: $b = 0$; $1; 2; \ldots ; 9$, y buscamos dos números consecutivos entre éstos que den resultados de signos opuestos. El número de sustituciones, en condiciones desfavorables, puede llegar a nueve, pero puede reducirse a la mitad mediante la siguiente observación. Sustituímos primero $b = 5$; si el resultado es positivo es inútil sustituir $b = 6; 7; 8; 9$; y si el resultado es negativo no hay por qué sustituir $b = 1; 2; 3; 4$. En este caso la sustitución $b = 5$ da un número negativo, así que es necesario continuar sustituyendo $b = 6; 7; 8; 9$. Como todas estas sustituciones dan resultados negativos, es indudable que la parte entera de b es 9, y podemos poner

$$b = 9 + \frac{c}{10},$$

donde $0 < c < 10$. Otra aplicación de la regla de Horner

$$\begin{array}{llrrr}
9) & 1 & 480 & 6800 & -104000 \\
 & & 9 & 4401 & 100809 \\
\hline
 & & 489 & 11201 & \underline{-\ 3191000} \\
 & & 9 & 4482 & \\
\hline
 & & 498 & \underline{1568300} & \\
 & & 9 & & \\
\hline
 & & \underline{5070} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array} \qquad [III]$$

demuestra que la ecuación en c es:

$$c^3 + 5070\, c^2 + 1568300\, c - 3191000 = 0 \qquad [3]$$

y para encontrar la parte entera de c podemos proceder por tanteos como anteriormente. Pero aquí concurre una circunstancia que facilita mucho el tanteo. Al examinar la ecuación [3], es obvio que los términos

$$c^3 + 5070\, c^2,$$

para $0 < c < 10$ son considerablemente menores que los términos

$$1568300\, c - 3191000.$$

Despreciando por esta razón todos los términos excepto estos dos y considerando la ecuación de primer grado

$$1568300\, c - 3191000 = 0,$$

es evidente que la raíz de esta ecuación no diferirá mucho del valor exacto de c y presumiblemente tendrá la misma parte entera. Ahora bien, la parte entera de c determinada en la ecuación abreviada es 2, y entonces ponemos:

$$c = 2 + \frac{d}{10} \quad ; \quad 0 < d < 10,$$

y buscamos la ecuación transformada en d mediante Horner:

$$\begin{array}{llrrr}
2) & 1 & 5070 & 1568300 & -3191000 \\
 & & 2 & 10144 & 3156888 \\
\hline
 & & 5072 & 1578444 & -\underline{34112000} \\
 & & 2 & 10148 & \\
\hline
 & & 5074 & \underline{158859200} & \\
 & & 2 & & \\
\hline
 & & \underline{50760} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array} \qquad [IV]$$

Como el número subrayado en la última columna es negativo, tenemos la certeza de que 2 no es mayor que la parte entera de c; tampoco es menor, pues la suma de los números subrayados

$$1 + 5076 + 1588592 - 34112$$

es el resultado de sustituir $c = 3$, y es positivo. Con respecto a la ecuación en d, es:

$$d^3 + 50760\, d^2 + 158859200\, d - 34112000 = 0$$

y aún con mayor razón podemos suponer que la parte entera de d es igual a la parte entera del cociente obtenido dividiendo 34112000 por 158859200. Esta parte entera es 0 y ponemos

$$d = 0 + \frac{e}{10} \quad ; \quad 0 < e < 10,$$

y los coeficientes de la ecuación en e se obtienen agregando a los números de las columna 2, 3 y 4 del esquema [IV] uno, dos y tres ceros respectivamente. Luego:

$$e^3 + 507600\, e^2 + 1588592000\, e - 34112000000 = 0.$$

La parte entera de e, determinada de acuerdo al método simplificado, es 2, y entonces pondremos:

$$e = 2 + \frac{f}{10} \quad ; \quad 0 < f < 10.$$

La ecuación transformada en f se obtiene como anteriormente.

$$\begin{array}{llrrr}
2) & 1 & 507600 & 15885920000 & -34112000000 \\
 & & 2 & 1015204 & 31773870408 \\
\hline
 & & 507602 & 15886935204 & -\underline{2338129592000} \\
 & & 2 & 1015208 & \\
\hline
 & & 507604 & \underline{1588795041200} & \\
 & & 2 & & \\
\hline
 & & \underline{5076060} & & \\
 & \underline{1} & & &
\end{array} \qquad [V]$$

La ecuación en f es:

$$f^3 + 5076060 f^2 + 1588795041200 f - 2338129592000 = 0\,. \qquad [4]$$

En este punto nos detenemos un momento, pues la continuación del proceso llevaría a números excesivamente grandes. Una de las características más importantes del método de Horner, y que no puede omitirse, es la así llamada « contracción », que será explicada enseguida. Debemos también mencionar que los cálculos separados en [I], [II], [III], [IV] y [V] se combinan en un esquema compacto de la forma que se muestra a continuación y que no requiere una explicación detallada.

1)	1	0	−7	7
		1	1	−6
		1	−6	1000
		1	2	−1104
		2	−400	− 104000
		1	216	100809
		30	−184	− 3191000
6)	1	6	252	3156888
		36	6800	− 34112000000
		6	4401	31773870408
		42	11201	− 2338129592
		6	4482	
		480	1568300	
9)	1	9	10144	
		489	1578444	
		9	10148	
		498	15885920000	
		9	1015204	
		5070	15886935204	
2)	1	2	1015208	
		5072	15887950412	
		2		
		5074		
		2		
		507600		
2) 0)	1	2		
		507602		
		2		
		507604		
		2		
		507606		
	1			

En cuanto al valor de la raíz x resulta de la combinación de las sustituciones

$$x = 1 + \frac{a}{10} \quad ; \quad a = 6 + \frac{b}{10} \quad ; \quad b = 9 + \frac{c}{10}\,;$$

$$c = 2 + \frac{d}{10} \quad ; \quad d = 0 + \frac{e}{10} \quad ; \quad e = 2 + \frac{f}{10}$$

y puede en consecuencia, expresarse

$$x = 1 + \frac{6}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{f}{10^6}$$

o sea

$$x = 1{,}69202 + \frac{f}{10^6}$$

de manera que los números 1; 6; 9; 2; 0; 2 que aparecen a la izquierda del esquema anterior son las cifras sucesivas de x. Aún más, desde que $0 < f < 10$, es evidente que

$$1{,}69202$$

es una aproximación por defecto de x con cinco decimales exactos.

Problemas

Calcúlese por el método de Horner:

1. $\sqrt[3]{7}$ con tres decimales.

2. $\sqrt[3]{18}$ con cuatro decimales.

3. $\sqrt[3]{3{,}895}$ con tres decimales.

4. $\sqrt[4]{20}$ con cuatro decimales.

5. $\sqrt[5]{100}$ con tres decimales.

Calcúlense con el método de Horner las raíces de:

6. $x^3 + x^2 + x - 100 = 0$ con tres decimales.

7. $x^4 + 4x - 1 = 0$. La raíz negativa con tres decimales.

8. $x^3 - 3x + 1 = 0$. Las raíces positivas con tres decimales.

9. $x^4 - 4x + 1 = 0$. Las raíces positivas con tres decimales.

Calcúlense con tres decimales las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas:

10. $x^2 + y = 1 \quad ; \quad x + y^2 = 2.$

11. $x^2 + y^2 = 5 \quad ; \quad y = x^2 + x$

Calcúlense con tres cifras significativas las raíces de:

12. $2x^3 - 30x^2 + 7x + 10 = 0.$

13. $x^3 - 50x^2 + 120x + 30 = 0.$

14. $2x^3 - 250x^2 + 500x + 1000 = 0.$

15 $x^4 - 125x^3 + 200x^2 - 300x + 500 = 0.$

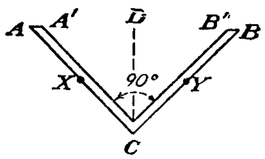
16. Una cáscara esférica de hierro, vacía por dentro, se hunde en el agua hasta la profundidad de su radio exterior. Si el espesor de la cáscara es de 1 cm y el peso específico del hierro es 7,5, ¿cuál es el valor del radio exterior?

17. Resuélvase el Problema anterior suponiendo que la cáscara, completamente sumergida, no se hunde hasta el fondo.

18. Una caja cúbica abierta tiene paredes de hierro de 1 cm de espesor y se hunde en el

agua hasta la mitad de su altura. Calcúlense con tres cifras significativas las dimensiones externas de la caja, en cm.

19. La figura representa la sección según su eje de un embudo cónico de hierro que flota en el agua, estando la parte XCY sumergida. Si $AA' = BB' = 1$ cm y (*a*) $CY = {}^1/_2\, CB$; (*b*) $CY = CB$, ¿cuál es la altura CD en cm?. Háganse los cálculos con tres cifras significativas.



20. ¿Hasta qué profundidad se hunde en el agua una bola de madera si el peso específico de la madera es ${}^3/_4$?

3. **Contracción.** — Volvemos ahora al método de « contracción » mencionado al final del último párrafo. Si la ecuación [4] en f se divide por 10^3, toma la forma:

$$0{,}001 f^3 + 5076{,}06 f^2 + 1588795041{,}2 f - 2338129592 = 0 .$$

Podemos suponer que la raíz de esta ecuación cambiará muy poco si se desprecian las partes decimales de los coeficientes y la relación anterior se reemplaza por:

$$0 f^3 + 5076 f^2 + 1588795041 f - 2338129592 = 0 , \qquad [1]$$

que es una ecuación de segundo grado. Sus coeficientes pueden escribirse inmediatamente siguiendo esta regla que en esencia, es la contracción que deseamos explicar: No agregamos ceros en las columnas 2, 3, 4 sino que suprimimos 1, 2, 3 cifras a la derecha de los números que se encuentran en las columnas 3, 2, 1 respectivamente. Para calcular la raíz de la ecuación [1], primero encontramos su parte entera, tomándola igual a la parte entera del cociente que se obtiene dividiendo 2338129592 por 1588795041. Siendo esta parte entera igual a 1, ponemos:

$$f = 1 + \frac{g}{10} \ ; \ 0 < g < 10 ,$$

y encontramos la ecuación en g mediante Horner:

$$\begin{array}{llrr}
1) & 5076 & 1588795041 & -2338129592 \\
 & & 5076 & 1588800117 \\
\hline
 & & 1588800117 & -\ 749329475 \\
 & & 5076 & \\
\hline
 & & 15888051\cancel{3} & \\
 & 507\cancel{6} & &
\end{array} \qquad [VI]$$

Esta ecuación puede escribirse así:

$$50{,}76\, g^2 + 158880519{,}3\, g - 749329475 = 0 .$$

Una vez despreciadas las fracciones, se la reemplaza por esta otra ecuación:

$$50\,g^2 + 158880519\,g - 749329475 = 0\,,$$

cuya raíz difiere muy poco del verdadero valor de g. Los coeficientes de la última ecuación se obtienen suprimiendo una o dos cifras a la derecha en los números del esquema [VI] que se encuentran en las columnas 2 y 1, respectivamente. La parte entera de g es 4, y ponemos

$$g = 4 + \frac{h}{10} \quad ; \quad 0 < h < 10.$$

calculándose los coeficientes de la ecuación en h de la manera acostumbrada

$$\begin{array}{rrrr}
4) & 50 & 158880519 & -749329475 \\
 & & 200 & 635522876 \\
\hline
 & & 158880719 & -113806599 \\
 & & 200 & \\
\cline{1-3}
 & & 15888091\cancel{9} & \\
 & \cancel{5}\cancel{0} & &
\end{array} \qquad [VII]$$

La ecuación en h puede escribirse entonces:

$$0{,}50\,h^2 + 15888091{,}9\,h - 113806599 = 0\,,$$

y se reemplaza nuevamente, despreciando las fracciones, por la ecuación de primer grado:

$$15888091\,h - 113806599 = 0\,, \qquad [2]$$

cuyos coeficientes se encuentran en el esquema [VII] suprimiendo la última y las dos últimas cifras, respectivamente, en las columnas 2 y 1. Los esquemas [VI] y [VII] se combinan así:

$$\begin{array}{rrrr}
1) & 5076 & 1588795041 & -2338129592 \\
 & & 5076 & 1588800117 \\
\hline
 & & 1588800117 & -\ 749329475 \\
 & & 5076 & 635522876 \\
\hline
 & & 158880519\cancel{3} & -\ 113806599 \\
4) & 50\cancel{7}\cancel{6} & 200 & \\
\cline{1-3}
 & & 158880719 & \\
 & & 200 & \\
\cline{1-3}
 & & 15888091\cancel{9} & \\
 & \cancel{5}\cancel{0} & &
\end{array}$$

constituyendo la contracción del método de Horner. El valor aproximado de h puede encontrarse ahora en la ecuación [2] por división.

Sin embargo, es necesario saber con cuántas cifras puede ser computado el cociente. A este fin, la siguiente observación general puede servir de guía para decidir cuántos decimales de la raíz pueden encontrarse por el proceso de contracción. Examínense cuántas cifras hay en el número que está en la anteúltima columna, obtenido antes de empezar el proceso de contracción. Supóngase que haya N cifras; en nuestro ejemplo $N = 11$. Si n es el grado de la ecuación, réstese $n + 1$ a N; la diferencia $N - (n + 1)$, que en nuestro caso es $11 - 4 = 7$, da el número de cifras que puede esperarse encontrar por el proceso de contracción. De acuerdo con esta regla podremos hallar, en nuestro ejemplo, siete cifras de la raíz por contracción; por lo tanto, h debe determinarse por división con cinco cifras. Con este grado de aproximación se encuentra:

$$h = 7{,}1630\,,$$

y el valor correspondiente de la raíz pedida es:

$$x = 1{,}692021471630\,,$$

con 12 decimales. En la parte regular del método de Horner el trabajo numérico crece con cada nueva cifra hallada, pero en la parte de contracción, por el contrario, el trabajo decrece en cada paso. La parte regular es justamente como trepar una montaña: el esfuerzo crece a medida que llegamos a la cima; por el contrario, la parte de contracción es como el descenso desde la cima: cuanto más bajamos, menor es el esfuerzo que debemos hacer.

Hemos tratado nuestro ejemplo con todos los detalles necesarios para explicar la parte esencial del método de Horner, pero aún quedan por examinar dos puntos importantes. En primer lugar, resta por explicar cómo efectuar la última división con un divisor grande de la manera más expeditiva posible y en segundo lugar, examinar más detenidamente la cuestión del error cometido al usar el proceso de contracción. En el Párrafo 4 se darán las reglas del interésante método de división propuesto por Fourier y en el Párrafo 5 examinaremos con detalle la determinación del error.

Problemas

Calcúlense con el número de cifras decimales indicado en cada caso, las raíces de:

1. $x^3 - 3 = 0$, seis decimales. **2.** $2x^3 - 5 = 0$, seis decimales.

3. $x^3 - x - 1 = 0$, seis decimales.

4. $3x^3 - 7x^2 + 2x + 5 = 0$, seis decimales.

5. $6x^3 - 7x^2 + 10x + 5 = 0$, ocho decimales.

6. $x^3 + 4x^2 - 7 = 0$. La raíz positiva con seis decimales.

7. $x^3 - 9x - 9 = 0$. La raíz positiva con ocho decimales.

8. $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$. La raíz positiva con ocho decimales.

9. $x^3 - 7x + 7 = 0$. La raíz negativa con ocho decimales.

10. $x^4 - 4x + 1 = 0$. La menor raíz positiva con seis decimales.

11. $x^4 - 6x + 2 = 0$. La mayor raíz positiva con seis decimales.

12. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 = 0$. La raíz positiva con ocho decimales.

13. $x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 7 = 0$. La raíz positiva con ocho decimales.

14. $x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 7x - 11 = 0$. La raíz negativa con ocho decimales.

15. $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 12x + 3 = 0$
16. $7x^4 - 16x^3 + x^2 - 9x + 7 = 0$
Todas las raíces reales con seis decimales.

17. $x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$
18. $x^5 + x^4 - 7x^3 - 22x^2 + x + 1 = 0$
Todas las raíces reales con seis decimales.

★ 4. **La División de Fourier.** — Cuando hay que dividir un número por otro con muchas cifras decimales, es ventajoso emplear el método de división propuesto por Fourier. En el método de división de Fourier un grupo o número pequeño de cifras del divisor, consistente, digamos, en dos o tres cifras, se elige como divisor « abreviado » y todas las divisiones se hacen con este divisor abreviado, tomándose gradualmente en consideración las restantes cifras del divisor para efectuar las así llamadas « correcciones ». Supóngase que B es el divisor abreviado y que las cifras siguientes son $b_0, b_1, b_2, \ldots$ de manera que el divisor completo es

$$Bb_0\, b_1\, b_2 \ldots$$

Sean también

$$c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_n ;$$

las cifras del cociente empleado en el proceso de la división de Fourier. Entonces, la « corrección » correspondiente se calcula con la fórmula

$$b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0 ,$$

de manera que las correcciones, luego de encontrar una, dos, tres, etc., cifras en el cociente son:

$$b_0 c_0 \ ; \ b_0 c_1 + b_1 c_0 \ ; \ b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \ ; \ \ldots$$

Al comienzo estas correcciones puden ser computadas fácilmente en forma mental; pero cuando se han determinado varias cifras del cociente,

la mejor manera de calcularlas es la siguiente: escríbanse en una tira de papel las cifras del divisor que siguen al divisor abreviado, en orden inverso, así:

$$\overline{\underline{\ldots\ b_3\ b_2\ b_1\ b_0\,.}}$$

Colóquese la tira de manera que b_0 quede inmediatamente debajo de la última cifra encontrada en el cociente y hágase la suma de los productos de los números que quedan uno sobre el otro. Esto puede hacerse fácilmente sumando primero las unidades de estos productos, luego las decenas si las hay, etc.

Para determinar la primera cifra del cociente divídase el dividendo, suplementado si fuera necesario con tantos ceros a la derecha como deseemos, por el divisor abreviado en la forma ordinaria. Agréguese al resto la cifra siguiente del dividendo y del número obtenido réstese la primera corrección, que da el dividendo parcial corregido. Para encontrar la segunda cifra del cociente divídase este dividendo parcial corregido nuevamente por el divisor abreviado y réstese la segunda corrección, lo que dará el segundo dividendo parcial corregido. Al dividirlo por el divisor abreviado se obtiene la tercera cifra del cociente. Al resto obtenido se le agrega la cifra correspondiente del dividendo y se resta la tercera corrección, luego de lo cual se procede como anteriormente. Mientras luego de las correcciones no se encuentren números negativos, se puede continuar con esta marcha regular de las operaciones. Si, por el contrario, aparece un número negativo después de la corrección, es signo de que la última cifra encontrada en el cociente debe ser disminuída. Esto, cuando la última cifra y alguna de las precedentes son cero causa un cambio en un cierto número de cifras del cociente. Supóngase que cambien exactamente i cifras. Entonces, al número negativo que resulte de la corrección se debe sumar

$$10\,B + b_0 + b_1 + \ldots + b_{i-1}$$

y luego continuar como antes. Si en un cierto estado de la división de Fourier es conveniente hacer un cambio del divisor abreviado B por un divisor abreviado mayor Bb_0, entonces debe hacerse su corrección como de costumbre, pero en lugar de continuar con la división por B, se debe agregar otra cifra del dividendo y hacerse una nueva corrección pero con el nuevo divisor abreviado; luego se sigue con el procedimiento regular empleando el nuevo divisor abreviado. Los ejemplos siguientes servirán para ilustrar el método de la división de Fourier ★

Ejemplo 1. Se quiere hallar cinco cifras en el cociente de dividir 113806599 por 15888091 Las operaciones se disponen como se indica a continuación; las observaciones explicativas se dan a continuación.

$$
\begin{array}{r|l}
113805699 & \underline{15888091} \\
\underline{105} & 1 \\
88 & 7\cancel{2}630 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\underline{-\ 56} & 7 \times 8 = 56 \text{ corrección} \\
32 & \\
\underline{30} & \\
20 & \\
\underline{-\ 72} & 2 \times 8 + 7 \times 8 = 72 \text{ corrección} \\
-\ 52 & \text{(la cifra 2 demasiado alta)} \\
\underline{158} & \\
106 & \\
\underline{90} & \\
166 & \\
\underline{-112} & 6 \times 8 + 1 \times 8 + 7 \times 8 = 112 \text{ corrección} \\
545 & \\
\underline{-\ 56} & 6 \times 8 + 1 \times 8 + 7 \times 0 = 56 \text{ corrección} \\
489 & \text{La división continúa con el divisor 158.} \\
\underline{474} & \\
159 & \\
\underline{-135} & 3 \times 8 + 6 \times 8 + 1 \times 0 + 7 \times 9 = 135 \text{ corrección} \\
249 & \\
\underline{-\ 40} & 0 \times 8 + 3 \times 8 + 6 \times 0 + 1 \times 9 + 7 \times 1 = 40 \text{ corrección} \\
209 &
\end{array}
$$

Explicaciones

El primer divisor abreviado es 15. Habiéndose determinado 2 luego de la segunda división y dando la corrección un número negativo, se halla —52. Por lo tanto, se cambia 2 por 1 y, como es la única cifra que cambia, sumamos a —56 la cantidad

$$15 \times 10 + 8 = 158$$

lo que da 106. Luego de encontrar 6 como tercera cifra, deseamos tomar 158 como nuevo divisor abreviado. Con este fin se resta a 166 una corrección que llega a 112, lo que da 54. En lugar de dividir 54 por 15, se agrega la cifra siguiente 5 y de 545 se resta una corrección de 56 correspondiente al nuevo divisor abreviado 158. El número resultante se divide ahora por 158 y las correcciones siguientes se hacen correspondiendo al divisor abreviado 158. El lugar de la coma decimal se determina por observación directa, y el cociente hallado con cinco cifras es:

$$7{,}1630 + .$$

Ejemplo 2. Determinar siete cifras del cociente de la división 26,73385 por 324,754813. Como el lugar de la coma decimal se determina fácilmente por observación, nos desentendemos de la coma decimal y ordenamos las operaciones como se indica a continuación, tomando al comienzo como divisor abreviado 32.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 2673385 & 324754813 \\ \cline{3-3}
 & 256 & 8232010 \\ \cline{2-2}
 & 113 & \\
\text{Corrección} & -\ 32 & \\ \cline{2-2}
 & 81 & \\
 & 64 & \\ \cline{2-2}
 & 173 & \\
\text{Corrección} & -\ 64 & \\ \cline{2-2}
 & 109 & \\
 & 96 & \\ \cline{2-2}
 & 138 & \\
\text{Corrección} & -\ 66 & \\ \cline{2-2}
 & 72 & \\
 & 64 & \\ \cline{2-2}
 & 85 & \\
\text{Corrección} & -\ 71 & \\ \cline{2-2}
 & 140 & \\
\text{Corrección} & -\ 101 & \\ \cline{2-2}
 & 390 & \text{Aquí cambiamos a un nuevo divisor.} \\
\text{Corrección} & -\ 46 & \\ \cline{2-2}
 & 344 & \\
 & 324 & \\ \cline{2-2}
 & 200 & \\
\text{Corrección} & -\ 65 & \\ \cline{2-2}
 & 135 &
\end{array}
$$

Por lo tanto el cociente pedido es

$$0{,}08232010 + .$$

La teoría completa de la división de Fourier es algo complicada; por otra parte, ésta juega aquí sólo un papel auxiliar y por esta razón no nos extenderemos en mayores detalles. Sin embargo, debido a su utilidad práctica, es imposible omitir algo más, que es la aplicación del método de división de Fourier a la extracción de raíces cuadradas. Para dar un ejemplo supongamos que deseamos extraer la raíz cuadrada del número 500. Se ve inmediatamente que la parte entera de la raíz es 22, y que de esta manera puede escribirse como $22 + x$, donde $0 < x < 1$. Entonces:

$$(22 + x)^2 = 484 + 44\,x + x^2 = 500\,,$$

de donde

$$44\,x + x^2 = 16$$

o sea

$$x = \frac{16}{44 + x}\cdot$$

Dividiendo 16 por $44 + x$ por el método de Fourier y tomando 44 como divisor abreviado podemos determinar la primera cifra del cociente, la que será inmediatamente escrita al lado del 44, haciendo la correspondiente corrección.

Se determina luego la segunda cifra de x y se escribe también en el divisor y así sucesivamente. En el caso en que la corrección dé negativa, la última cifra, tanto del cociente como del divisor, debe ser disminuída en 1. Esto puede afectar un cierto número de cifras, digamos i cifras. Luego, para continuar la operación, debemos sumar al número negativo 10 veces el divisor abreviado más el doble de la suma de las i cifras que le siguen o este número aumentado en 1, según que i sea o no mayor que la mitad del número total de cifras escritas en el cociente. Las cifras restantes permanecen las mismas que en la división ordinaria. Las operaciones de nuestro ejemplo se disponen como sigue:

$$\begin{array}{r|l}
 & \overline{446} \qquad\quad {}^{79}\quad {}^{49} \\
160 & \cancel{\overline{44}3}606\cancel{8}\cancel{0}77\cancel{5}\cancel{0} \\
\cline{2-2}
132 & \qquad {}^{79}\quad {}^{49} \\
\overline{280} & 3606\cancel{8}\cancel{0}77\cancel{5}\cancel{0}
\end{array}$$

Corrección	— 9		
	271		
	264		Continuación
	70		3620
Corrección	—36	Corrección	—144
	340		3476
Corrección	— 36		3122
	304		3540
	264	Corrección	—168
	400		3372
Corrección	— 36		3122
	364		2500
	352	Corrección	—241
	120		2259
Corrección	—120		2230
	00		290
	— 96	Corrección	—270
	— 96		200
$44 \times 10 + 2\,(3 + 6) =$	458	Corrección	—263
	362		— 63

Aquí cambiamos al divisor mayor 446

Sin continuar más allá con la división podemos concluir que

$$\sqrt{500} = 22{,}3606797749 + .$$

Problemas

Encontrar por la división de Fourier el cociente de dividir

1. 237,69 por 33,65489 con seis decimales. Usar el divisor 33 en tres divisiones y 336 luego.

2. 63,9878 por 24,85397 con seis decimales. Divisor 24 en cuatro divisiones y luego 248.

3. 3,173563 por 334,856921 con diez cifras significativas. Divisor 33 en cinco divisiones y 334 luego.

4. 180 por π con ocho decimales; $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$

Extraer las siguientes raíces cuadradas por el método de Fourier:

5. $\sqrt{2{,}185}$ con ocho decimales.

6. $\sqrt{3465{,}23}$ con ocho decimales.

7. $\sqrt{0{,}031429}$ con ocho decimales.

8. $\sqrt{\sqrt{2}-1}$ con ocho decimales.

★ 5. **Estimación del error.** — Debemos examinar ahora el error que se produce por el proceso de contracción. La parte regular del método de Horner nos lleva a representar la raíz de la ecuación

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

con la cual trabajábamos, en la forma:

$$x = 1{,}69202 + \frac{f}{10^6},$$

donde f es una raíz de la ecuación:

$$0{,}001\, f^3 + 5076{,}06 f^2 + 1588795041{,}2 f - 2338129592 = 0,$$

contenida entre 0 y 10. Esta ecuación fué reemplazada, sin embargo, por

$$\phi(x) = 5076\, x^2 + 1588795041\, x - 2338129592 = 0,$$

cuya raíz, que se aproxima a f pero que no es igual, llamaremos f_0. Es necesario estimar la diferencia $f - f_0$. Con este fin, nótese que la ecuación en f puede escribirse así:

$$\phi(f) = -0{,}001 f^3 - 0{,}06 f^2 - 0{,}2 f.$$

Por otra parte: $\phi(f_0) = 0$, y así

$$\phi(f) - \phi(f_0) = -0{,}001\, f^3 - 0{,}06 f^2 - 0{,}2 f.$$

Pero, por la fórmula del valor medio que se enseña en los cursos de cálculo diferencial:

$$\phi(f) - \phi(f_0) = (f - f_0)\, \phi'(\xi),$$

donde ξ es un cierto número comprendido entre f y f_0. En consecuencia:

$$f - f_0 = -\frac{0{,}001 f^3 + 0{,}06 f^2 + 0{,}2 f}{\phi'(\xi)},$$

de manera que la diferencia es ciertamente negativa, porque

$$\phi'(\xi) > 1{,}5 \times 10^9.$$

Por otra parte, desde que $f < 10$:

$$0{,}001 f^3 + 0{,}06 f^2 + 0{,}2 f < (0{,}001 + 0{,}006 + 0{,}002) \times 10^3 = \\ = 0{,}009 \times 10^3 < 0{,}01 \times 10^3,$$

y luego:

$$-\frac{0{,}01}{1{,}5} \times 10^{-6} < f - f_0 < 0. \qquad [1]$$

Al mismo tiempo

$$x = 1{,}69202 + \frac{f_0}{10^6} + \frac{f - f_0}{10^6}.$$

Con respecto a f_0, se tomó de la forma

$$f_0 = 1 + \frac{g}{10},$$

donde g es una raíz de la ecuación

$$50{,}76\, g^2 + 158880519{,}3\, g - 749329475 = 0,$$

contenida entre 0 y 10. Pero esta ecuación es reemplazada por

$$f_1(x) = 50\, x^2 + 158880519\, x - 749329475 = 0,$$

cuya raíz, próxima a g, puede llamarse g_0. La diferencia $g - g_0$ puede ser estimada de la misma manera que la diferencia $f - f_0$; resulta que:

$$-\frac{0{,}79}{1{,}5} \times 10^6 < g - g_0 < 0. \qquad [2]$$

Al mismo tiempo podemos escribir

$$f_0 = 1 + \frac{g_0}{10} + \frac{g - g_0}{10}.$$

Ahora

$$g_0 = 4 + \frac{h}{10},$$

donde h, comprendido entre 0 y 10, satisface la ecuación

$$0{,}50\, h^2 + 15888091{,}9\, h - 113806599 = 0.$$

Pero sustituímos a h por la raíz h_0 de la ecuación

$$15888091\, h_0 - 113806599 = 0\,.$$

La diferencia $h - h_0$ puede estimarse como anteriormente y se encuentra que

$$-\frac{0{,}59}{1{,}5} \times 10^{-5} < h - h_0 < 0\,. \qquad [3]$$

Al mismo tiempo

$$g_0 = 4 + \frac{h_0}{10} + \frac{h - h_0}{10}\,,$$

y

$$f_0 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{h_0}{10^2} + \frac{h - h_0}{10^2} + \frac{g - g_0}{10}$$

$$x = 1{,}69202 + \frac{1}{10^6} + \frac{4}{10^7} + \frac{h_0}{10^8} + \frac{h - h_0}{10^8} + \frac{g - g_0}{10^7} + \frac{f - f_0}{10^6}\,.$$

Por las desigualdades [1], [2] y [3] la cantidad

$$\Delta = \frac{f - f_0}{10^6} + \frac{g - g_0}{10^7} + \frac{h - h_0}{10^8}\,,$$

que representa realmente el error cometido por la contracción, es negativo, y su valor absoluto es menor que

$$\frac{0{,}01}{1{,}5} \times 10^{-12} + \frac{0{,}79}{1{,}5} \times 10^{-15} + \frac{0{,}59}{1{,}5} \times 10^{-13} < \frac{1{,}48}{1{,}5} \times 10^{-13} < 10^{-13}.$$

Puesto que $h_0 \times 10^{-8}$ está comprendido entre las cotas

$$x < 1{,}6920214716301$$

$$x > 1{,}6920214716299\,,$$

y tomando

$$x = 1{,}692021471630\,,$$

tenemos un valor aproximado de la raíz que difiere del valor real en menos de 10^{-13}. Queda sobreentendido que el error cometido por la contracción puede estimarse en forma muy similar en cualquier otro caso ★.

6. **Otro ejemplo.** — Vale la pena ilustrar el método de Horner completo con otro ejemplo.

Ejemplo. La ecuación

$$x^4 - 4\,x + 1 = 0,$$

tiene dos raíces reales: una en el intervalo (0; 1) y otra en el intervalo (1; 2). Calculemos aproximadamente la menor. Escribiendo

$$x = \frac{a}{10} \quad ; \quad 0 < a < 10,$$

la ecuación para determinar a se encuentra inmediatamente

$$a^4 - 4000\,a + 10000 = 0$$

y se determina por tanteos que la raíz, que es menor que 10, está contenida entre 2 y 3; así que escribimos:

$$a = 2 + \frac{b}{10} \quad ; \quad 0 < b < 10\,.$$

Los cálculos necesarios para encontrar la ecuación transformada en b, así como otras ecuaciones que aparecen en el método de Horner, se muestran en el esquema siguiente:

2)	1	0	0	− 4000	10000
		2	4	8	− 7984
		2	4	− 3992	20160000
		2	8	24	− 19769375
		4	12	− 3968000	3906250000
		2	12	14125	
		6	2400	− 3953875	
		2	425	16375	
		80	2825	− 393750000~~0~~	
5)	~~1~~	5	450		
		85	3275		
		5	475		
		90	3750~~00~~		
		5			
		95			
		5			
		1~~000~~			
0)	~~1~~				

A esta altura comenzamos la contracción, cuyos sucesivos pasos están representados en el esquema siguiente:

9)	1	3750	—393750000	3906250000
		9	33831	—3543445521
		3759	—393716169	362804479
		9	33912	—354311028
		3768	—39368225~~7~~	8493451
		9	333	
	9)	37~~77~~	—39367892	
~~1~~			333	
			—3936755~~0~~	
		~~27~~		

Hasta este momento los decimales obtenidos son:

$$0{,}25099.$$

Los decimales restantes se determinarán por la división de Fourier. Desde que el número obtenido en la columna 4 antes de la contracción, tiene 10 cifras, podemos contar con encontrar $10 - 5 = 5$ cifras por contracción, y por ello la división se llevará hasta tres cifras. El resultado es el siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
8493451 & \overline{39}35755 \\ \cline{2-2}
\underline{78} & 2157 \\
69 & \\
\underline{6} & \\
63 & \\
\underline{39} & \\
243 & \\
\underline{15} & \\
228 & \\
\underline{195} & \\
334 & \\
\underline{35} & \\
299 & \\
\underline{273} & \\
26 &
\end{array}$$

Luego, la raíz pedida es:

$$0{,}25099215\,,$$

y solamente resta examinar con mayor detenimiento el grado de aproximación. Poniendo

$$x = 0{,}250 + \frac{d}{10^4}\,,$$

donde $0 < d < 10$, se desprende que d satisface la ecuación

$$0{,}0001\, d^4 + d^3 + 3750\, d^2 - 393750000\, d + 3906250000 = 0.$$

En lugar de d sustituímos, en realidad, la raíz d_0 de la ecuación

$$d_0^3 + 3750\, d_0^2 - 393750000\, d_0 + 3906250000 = 0.$$

En la parte de contracción del proceso se encuentra que:

$$d_0 = 9 + \frac{e}{10} \quad ; \qquad 0 < e < 10\,,$$

donde e satisface la ecuación

$$0{,}001\, e^3 + 37{,}77\, e^2 - 39368225{,}7\, e + 362804479 = 0,$$

pero en lugar de e tomamos realmente la raíz e_0 de la ecuación

$$37\, e_0^2 - 39368225\, e_0 + 362804479 = 0,$$

Nuevamente:

$$e_0 = 9 + \frac{f}{10} \quad ; \quad 0 < f < 10,$$

y f satisface la ecuación

$$0{,}37 f^2 - 3936755{,}7 f + 8493451 = 0,$$

pero en lugar de f se toma la raíz f_0 de la ecuación

$$-3936755 f_0 + 8493451 = 0.$$

Ahora tenemos

$$x = 0{,}25099 + \frac{f_0}{10^6} + \Delta ,$$

donde

$$\Delta = \frac{d - d_0}{10^4} + \frac{e - e_0}{10^5} + \frac{f - f_0}{10^6}.$$

Los signos de las diferencias $d - d_0$, $e - e_0$ y $f - f_0$ no se conocen ahora con certeza y solamente podemos establecer que

$$\left| d - d_0 \right| < \frac{0{,}0001}{3{,}9} \times 10^{-4}$$

$$\left| e - e_0 \right| < \frac{0{,}085}{3{,}9} \times 10^{-4}$$

$$\left| f - f_0 \right| < \frac{0{,}46}{3{,}9} \times 10^{-4}$$

de donde

$$| \Delta | < \frac{0{,}0132}{3{,}9} \times 10^{-8} < 3{,}4 \times 10^{-11},$$

de manera que el error cometido por contracción puede afectar solamente el undécimo lugar decimal y la aproximación resulta mucho mejor que la sugerida por la regla rápida del Párrafo 3. Por la división de Fourier se encuentra que

$$0{,}00000215747 < \frac{f_0}{10^6} < 0{,}00000215748$$

y luego

$$0{,}250992157413 < x < 0{,}250992157582.$$

Tomando

$$x = 0{,}2509921575,$$

podemos estar seguros que el error no excede de 10^{-10}, en valor absoluto.

Problemas

Examínense cuántas cifras más pueden hallarse por contracción, habiéndose determinado cuatro cifras significativas por el proceso regular de Horner.

1. $x^3 - 3x + 1 = 0$. Raíz entre 1 y 2.

2. $x^3 - 7x + 7 = 0$. Raíz entre 1 y 1,5.

3. $6x^3 - 7x^2 + 10x + 5 = 0$

4. $x^4 - 4x + 1 = 0$. Raíz entre 1 y 2.

5. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 3 = 0$. Raíz positiva.

6. $x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

7. **El método de iteración.** — Quedan por considerar otros dos métodos que se usan a menudo para calcular las raíces: el método de iteración (también llamado método de aproximaciones sucesivas) y el método de Newton. Este último es una forma particular de iteración, por lo que es conveniente ver éste primero. La idea del método es muy general y puede aplicarse a una ecuación dada en varias formas. La ecuación propuesta puede escribirse:

$$x = \theta(x),$$

en una cantidad de maneras distintas. Supondremos conocido que en algún intervalo $(a; b)$ la ecuación tiene la raíz única ξ de manera que

$$\xi = \theta(\xi) \quad \text{y} \quad a < \xi < b.$$

Con respecto a la función $\theta(x)$ supondremos al principio que es una función creciente de x en el intervalo $(a; b)$ y que, además:

$$a < \theta(a) \quad ; \quad b > \theta(b),$$

o

$$a - \theta(a) < 0 \quad ; \quad b - \theta(b) > 0.$$

Siendo ξ raíz única en el intervalo $(a; b)$ se deduce que

$$x - \theta(x) < 0,$$

si $a \leqq x < \xi$, y

$$x - \theta(x) > 0,$$

si $\xi < x \leqq b$. Sea ahora x_0 un número arbitrario $\geqq a$ y $\leqq b$. Tomándolo como primera aproximación de la raíz ξ y calculando por sucesivas sustituciones

$$x_1 = \theta(x_0) \quad ; \quad x_2 = \theta(x_1) \quad , \quad x_3 = \theta(x_2) \; ; \; \ldots$$

se genera una sucesión de números

$$x_0 \; , \; x_1 \; , \; x_2, \; \ldots$$

Esta sucesión será creciente con todos sus términos $< \xi$ si $x_0 < \xi$; y será decreciente, con todos sus términos $> \xi$ si $x_0 > \xi$. Para demostrar estas afirmaciones, supóngase primero que $x_0 < \xi$. Entonces:

$$x_1 = \theta(x_0) > x_0 \quad \text{ó} \quad x_1 > x_0 \,;$$

por otra parte:

$$\theta(\xi) > \theta(x_0),$$

porque $\theta(x)$ es una función creciente. Pero

$$\theta(\xi) = \xi \quad \text{y} \quad \theta(x_0) = x_1,$$

luego

$$x_1 < \xi.$$

Por repetición del mismo razonamiento, se demuestra que:

$$x_2 > x_1 \; ; \; x_2 < \xi.$$

Supóngase ahora que $x_0 > \xi$. Entonces:

$$x_1 = \theta(x_0) < x_0 \quad \text{ó} \quad x_1 < x_0 \, ;$$

y, por otra parte:

$$\xi = \theta(\xi) < \theta(x_0) = x_1$$

o sea

$$x_1 > \xi.$$

Por repetición del mismo razonamiento se demuestra que

$$\xi < x_2 < x_1.$$

La sucesión

$$x_0 \, ; \, x_1 \, , \, x_2 \, ; \ldots$$

ya sea creciente o decreciente, necesariamente tiende a un límite, y este límite, suponiendo la continuidad de $\theta(x)$, no puede ser otro que la raíz ξ a la cual es posible aproximarse de esta manera en forma indefinida por ambos lados.

Ejemplo 1. La ecuación

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

tiene una raíz entre 2 y 3. Puede ser escrita en la forma:

$$x = \sqrt[3]{2x + 5} = \theta(x),$$

y todas las condiciones enumeradas anteriormente se satisfacen: $\theta(x)$ es una función creciente y

$$\theta(2) > 2; \; \theta(3) < 3.$$

Tomando $x_0 = 2$ como primera aproximación y haciendo uso de tablas, calculamos la sucesión de aproximaciones a la raíz ξ, habiéndose tomado cada número escrito a continuación, aproximado por defecto.

$x_1 = 2{,}08$	$x_5 = 2{,}09452$
$x_2 = 2{,}092$	$x_6 = 2{,}094546$
$x_3 = 2{,}0941$	$x_7 = 2{,}0945506$
$x_4 = 2{,}0944$	$x_8 = 2{,}0945513.$

Por otra parte, comenzando con $x_0 = 3$, encontramos las siguientes aproximaciones, cada una ligeramente mayor que su verdadero valor:

$$x_1 = 2{,}23 \qquad x_5 = 2{,}09463$$
$$x_2 = 2{,}115 \qquad x_6 = 2{,}09457$$
$$x_3 = 2{,}09777 \qquad x_7 = 2{,}094555$$
$$x_4 = 2{,}09503 \qquad x_8 = 2{,}0945520$$
$$x_9 = 2{,}0945516\,.$$

Luego:

$$2{,}0945513 < \xi < 2{,}0945516,$$

y así

$$\xi = 2{,}094551,$$

con seis decimales exactos.

Ejemplo 2. Consideremos la ecuación trascendente

$$2^x = 4\,x,$$

que tiene una raíz entre 0 y 1. Cuando se escribe en la forma

$$x = 2^{x-2}\,,$$

se cumplen todas las condiciones para la iteración. Comenzando con $x_0 = 0$ y usando tablas de logaritmos de cuatro decimales, encontramos la sucesión de aproximaciones crecientes, habiéndose tomado cada una aproximada por defecto:

$$x_1 = 0{,}25 \qquad x_4 = 0{,}3088$$
$$x_2 = 0{,}29 \qquad x_5 = 0{,}3096$$
$$x_3 = 0{,}305 \qquad x_6 = 0{,}3098$$
$$x_7 = 0{,}3099\,.$$

Similarmente, podemos encontrar una sucesión de aproximaciones decrecientes comenzando con $x_0 = 1$. Al comparar los resultados, encontramos que la raíz pedida es muy cercana a

$$\xi = 0{,}3099.$$

La última cifra, naturalmente, no es muy cierta, desde que todos los cálculos han sido hechos con tablas de cuatro decimales.

Una ecuación de la forma

$$x = \theta\,(x)\,,$$

que tiene una sola raíz entre a y b puede siempre resolverse por un proceso conveniente de iteración si su derivada $\theta'\,(x)$ para $a \leqq x \leqq b$ se mantiene en valor absoluto menor que un número fijo $\rho < 1$, es decir si

$$|\,\theta'\,(x)\,| < \rho < 1\,,$$

para $a \leqq x \leqq b$. En efecto, la misma ecuación puede escribirse en la forma equivalente

$$x = \omega(x),$$

donde

$$\omega(x) = \frac{x + \theta(x)}{2}.$$

Ahora

$$\omega'(x) = \frac{1 + \theta'(x)}{2} > \frac{1 - \rho}{2} > 0,$$

para $a \leqq x \leqq b$ y luego $\omega(x)$ es una función creciente en el intervalo $(a; b)$. Por otra parte, la derivada de $f(x) = x - \omega(x)$ es

$$f'(x) = \frac{1 - \theta'(x)}{2} > \frac{1 - \rho}{2} > 0,$$

y siendo positiva, $f(x)$ es una función creciente que toma el valor 0 solamente una vez en el intervalo $(a; b)$, es decir para $x = \xi$, siendo ξ la única raíz de la ecuación

$$x = \theta(x),$$

entre a y b. Por lo tanto

$$f(a) < 0 \quad ; \quad f(b) > 0$$

ó

$$a < \omega(a) \quad ; \quad b > \omega(b).$$

Luego, la iteración aplicada a la ecuación

$$x = \omega(x),$$

convergerá, ya sea que comencemos con $x_0 = a$ ó $x_0 = b$. En los problemas se encontrarán más observaciones referentes a la convergencia.

Problemas

1. Si $|\theta'(x)| < \rho < 1$ para $a \leqq x \leqq b$, la ecuación $x = \theta(x)$ no puede tener más que una raíz entre a y b. Si se tiene tal raíz ξ y $x_1 = \theta(x_0)$, mientras que $a \leqq x_0 \leqq b$, demostrar que

$$|x_1 - \xi| < \rho\,|x_0 - \xi|.$$

Sugestión: $x_1 - \xi = (x_0 - \xi)\,\theta'(\eta)$, donde η está contenido entre x_0 y ξ.

2. Si $x = \theta(x)$ tiene una raíz ξ entre a y b, $|\theta'(x)| < \rho < 1$ para $a \leqq x \leqq b$ y las primeras dos aproximaciones

$$x_0 \quad \text{y} \quad x_1 = \theta(x_0)$$

pertenecen a $(a; b)$, entonces todas las aproximaciones subsiguientes $x_2, x_3, \ldots$ pertenecerán a $(a; b)$ y

$$|x_n - \xi| < \rho^n\,|x_0 - \xi|.$$

Aún más, las aproximaciones serán alternativamente mayores y menores que ξ si $\theta'(x) < 0$ en todo el intervalo $(a; b)$.

Calcúlese por iteración las raíces de las siguientes ecuaciones, con cuatro cifras decimales:

3. $x^3 - 2x - 2 = 0$. Escríbase $x = \sqrt[3]{2x+2}$ o $x = \sqrt{2 + \dfrac{2}{x}}$. ¿Cuál es la más ventajosa?

4. $x^3 - 10x - 5 = 0$. Escríbase $x = \sqrt{10 + \dfrac{5}{x}}$.

5. $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$. Escríbase $x = 3 + \dfrac{1}{x^2}$.

6. $x^3 + x^2 - 100 = 0$. Escríbase $x = \dfrac{10}{\sqrt{x+1}}$ ó $x = 4 + \dfrac{20}{x^2 + 5x + 20}$.

7. $x^3 + x^2 + x - 100 = 0$. Escríbase $x = \sqrt[3]{100 - x^2 - x}$ ó $x = 4 + \dfrac{16}{x^2 + 5x + 21}$.

Calcúlense con cinco cifras decimales las menores raíces positivas de las siguientes ecuaciones:

8. $x^3 - 6x + 1 = 0$. Escríbase $x = \dfrac{x^3 + 1}{6}$.

9. $x^4 - 3x + 1 = 0$. Escríbase $x = \dfrac{x^4 + 1}{3}$.

10. $x^{10} + x^4 + x^3 - 10x + 2 = 0$. Escríbase $x = \dfrac{2 + x^3 + x^4 + x^{10}}{10}$.

11. $x = 1 - \dfrac{x^3}{10}$. **12.** $x^3 - x^2 - 10x + 1 = 0$.

* Cuando una raíz de una ecuación $F(x) = 0$ quede encerrada en un intervalo suficientemente reducido $(a; b)$ donde los valores extremos A y B de la derivada $F'(x)$ no son muy diferentes, el proceso de iteración puede ser considerablemente acelerado escribiendo la ecuación en la forma

$$x = x - \frac{2}{A + B} F(x).$$

El factor $2(A + B)^{-1}$ puede ser reemplazado ventajosamente por una buena aproximación en términos pequeños obtenidos por medio de fracciones continuas. Aplíquese esta observación para calcular con cinco cifras decimales las raíces de las siguientes ecuaciones:

* **13.** $x^4 - 4x + 1 = 0$. Raíz entre 1 y 2. Hágase: $x = x - {}^{10}/_{7}\,(x - \sqrt[4]{4x - 1})$.

* **14.** $x^3 - 4x^2 - x + 3 = 0$. Raíz entre 4 y 5. Hágase: $x = x - {}^{25}/_{8}\,(x - \sqrt[3]{4x^2 + x - 3})$.

* **15** $x^3 + x^2 - 100 = 0$. Hágase $x = x - {}^{5}/_{7}\left(x - \dfrac{10}{\sqrt{x+1}}\right)$.

* **16** $x = \dfrac{1 - (1 + x)^{-15}}{10}$. Hágase $x = x - {}^{8}/_{3}\left(x - \dfrac{1 - (1 + x)^{-15}}{10}\right)$.

* **17.** $x = \dfrac{1 - (1+x)^{-30}}{15}$. Hágase $x = x - {}^{10}/_{7}\left(x - \dfrac{1-(1+x)^{-30}}{15}\right)$.

18. $x = {}^1/_2\, e^{-x}$. Hágase $x = x - {}^3/_4\ (x - {}^1/_2\, e^{-x})$.

19. $x = e^{-x}$. Hágase $x = x - {}^7/_{11}\ (x - e^{-x})$.

20. $x + 1 = 10^x$. Hágase $x = x - {}^{10}/_7\ (x + 1 - 10^x)$.

21. $x^x = 100$. Hágase $x = x + 2 - x \log x$.

22. $x = 1 - {}^1/_{10} \operatorname{sen} x$.

23. $x + \operatorname{sen} x = 1$. Hágase $x = \dfrac{x + 1 - \operatorname{sen} x}{2}$.

24. $x = \cos x$. Hágase $x = x - {}^3/_5\ (x - \cos x)$.

25. $\operatorname{sen} x = {}^1/_2\, x$. Póngase $x = {}^\pi/_2 + y$ y escríbase $y = y - {}^5/_8\,(y + {}^\pi/_2 - 2\cos y)$.

26. $x = \operatorname{tg} x$. Menor raíz positiva. Hágase $x = \pi + \operatorname{arc\,tg} x$.

27. $x \operatorname{tg} x = 1$. Menor raíz positiva. Hágase $x = \dfrac{x + \operatorname{arc\,tg} 1/x}{2}$.

8. **Método de Newton.** — El método de Newton para aproximar raíces puede ser considerado como una forma particular de iteración. La ecuación propuesta $f(x) = 0$ puede escribirse de la forma

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

o sea

$$x = \theta(x),$$

con

$$\theta(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Para examinar en qué condiciones las sucesivas aproximaciones que parten de x_0

$$x_1 = \theta(x_0) \quad ; \quad x_2 = \theta(x_1) \quad ; \quad x_3 = \theta(x_2)\ ; \ldots$$

convergen, supondremos que:

1. En el intervalo $(a; b)$ la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz.
2. Ni $f'(x)$ ni $f''(x)$ se anulan en este intervalo. Calculando la derivada $\theta'(x)$ se encuentra

$$\theta'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Desde que $f'(x)$ no cambia de signo entre a y b, la función $f(x)$ o bien es creciente o bien decreciente; y como se anula para $x = \xi$, los valores extremos $f(a)$ y $f(b)$ deben ser de signos opuestos. Por otra parte, el signo de $f''(x)$ no cambia, de manera que $f''(a)$ y $f''(b)$ tienen

el mismo signo; por lo tanto: $f(a)\ f''(a)$ y $f(b).f''(b)$ tienen signos opuestos: uno de estos números es positivo y el otro es negativo. De los puntos extremos del intervalo $(a; b)$ llamaremos α a aquel en el cual $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo, llamando β al otro extremo, de manera que $\alpha = a$, $\beta = b$ si

$$f(a) \, . \, f''(a) > 0$$

y $\alpha = b$, $\beta = a$ si

$$f(b) \, . \, f''(b) > 0 \, .$$

De la expresión de la derivada $\theta'(x)$ es evidente que cambia de signo solamente al pasar por $x = \xi$. En consecuencia, entre α y ξ el signo de $\theta'(x)$ es el mismo que para $x = \alpha$, es decir, positivo por la elección de α. Ahora, si $\alpha = a$, en el intervalo $(a; \xi)$ la función $\theta(x)$ es creciente, desde que su derivada es positiva y al mismo tiempo

$$\theta(a) - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} > 0.$$

Nuevamente, si $\alpha = b$, la función $\theta(x)$ es creciente en el intervalo $(\xi; b)$ y

$$\theta(b) - b = -\frac{f(b)}{f'(b)} < 0.$$

Aún más, $\theta(x)$ es continua en $(a; b)$ de manera que las condiciones de convergencia de un proceso iterativo tal como se enumeran en el Párrafo 7 quedan cumplidas si comenzamos con la primera aproximación $x_0 = \alpha$. Las aproximaciones sucesivas

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad ; \quad \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} \quad ; \ldots$$

estarán todas del mismo lado de la raíz ξ, cada una más próxima a ella que la precedente, y convergerán hacia dicha raíz. Estas conclusiones se hacen intuitivas al considerar la curva $y = f(x)$.

Como la segunda derivada y'' no se anula en el intervalo $(a; b)$ esta curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo, de acuerdo a que $y'' > 0$ ó $y'' < 0$. En las figuras (a), (b), (c) y (d) de la página siguiente, los puntos A y B del eje de las x tienen abscisas $x = a$ y $x = b$. Para valores de x contenidos entre a y b la curva $y = f(x)$ está representada por el arco PXQ que intersecta a $y = 0$ en el punto X cuya abscisa es $OX = \xi$. En el caso de las figuras (a) y (b), y e y'' tienen el mismo signo en Q. La tangente en este punto está representada por la ecuación

$$y - f(b) = f'(b)(x - b),$$

y corta a $y = 0$ en el punto T de abscisa

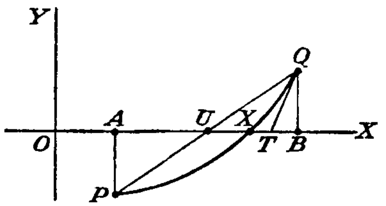
$$OT = b - \frac{f(b)}{f'(b)}\cdot$$

Nótese que T está del mismo lado de B con respecto a X, pero más próximo a X que B. En los casos de las figuras (c) y (d), y e y'' tienen el mismo signo en P. La tangente en este punto está representada por la ecuación

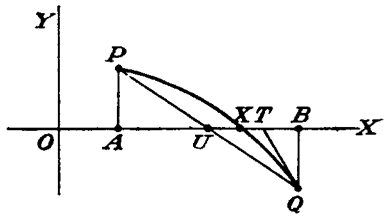
$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

y corta a $y = 0$ en el punto T de abscisa

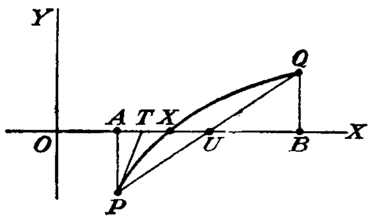
$$OT = a - \frac{f(a)}{f'(a)}\cdot$$



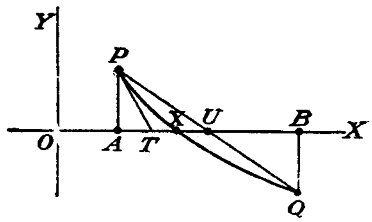
(a)



(b)



(c)



(d)

Nuevamente, T está más próximo a X que A y está situado del mismo lado. Estas consideraciones intuitivas confirman las conclusiones previamente alcanzadas y sugieren también la consideración del punto de intersección de la cuerda PQ con el eje x. Si este punto es U, está en el lado opuesto de T con respecto a X y más cercano a éste que A y B respectivamente. Como la ecuación de PQ es

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

la abscisa del punto U será:

$$OU = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) = b - \frac{f(b)}{f(a) - f(b)}(a - b),$$

y también puede ser representada por

$$\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f(\beta) - f(\alpha)}(\beta - \alpha).$$

La doble desigualdad

$$\alpha_1 < \xi < \beta_1$$

$$\alpha_1 > \xi > \beta_1,$$

según sea $\alpha = a$ ó $\alpha = b$, da una estimación del error cometido al calcular la segunda aproximación de la raíz por el método de Newton.

Si las cotas α_1 y β_1 están todavía muy separadas, el medio más práctico para seguir adelante es: sea a' la menor de estas cotas y b' la mayor. Estúdiese la diferencia $b' - a'$ y supóngase que la primera cifra decimal significativa ocupa el l-ésimo lugar. Entonces, reténgase en a' y b' solamente l decimales. Sean a'' y b'' los números obtenidos de redondear a' y b' en esta forma. Evidentemente a'' es menor que ξ, pero b'' puede ser mayor o menor que este número. En consecuencia, determínase primero por sustitución si b'' es mayor que ξ o no. En el primer caso hágase $a_1 = a''$; $b_1 = b''$, y en el segundo caso, $a_1 = b''$; $b_1 = b'' + 10^{-l}$. Entonces el intervalo $(a_1; b_1)$ contiene a ξ. Partiendo de este intervalo hállense cotas más restringidas α_2, β_2 en la misma forma en que fueron determinadas α_1, β_1 a partir de $(a; b)$. Entonces, con α_2, β_2 repítase el procedimiento aplicado a α_1, β_1 y continúese de esta manera mientras sea necesario para llegar al grado de aproximación deseado. Luego de unos pocos pasos de este tipo, la convergencia se hace muy rápida, pero no nos detendremos a estudiar este punto.

Ejemplo 1. Calculemos por este método la raíz de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0,$$

que está comprendida entre 1 y 2. La derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

se anula pára $x = 1$, así que estrictamente hablando el intervalo $(1; 2)$ no satisface las condiciones supuestas. Sin embargo, ya que

$$f(1) = -1 \quad ; \quad f''(1) = 6,$$

son de signos opuestos, tenemos que tomar $\alpha = 2$ y observamos que en el intervalo $(\xi; 2)$ la primera derivada no se anula. Con $\alpha = 2$; $\beta = 1$, encontramos

$$\alpha_1 = 2 - {}^3/_9 = 1{,}66 + \quad ; \quad \beta_1 = 1{,}25,$$

de manera que α_1 y β_1 se redondean a

$$1{,}6 \text{ y } 1{,}2.$$

Al sustituir 1,6 se encuentra que

$$f(1{,}6) = \quad 0{,}296 \quad ; \quad f'(1{,}6) = 4{,}68$$

$$f(1{,}2) = -0{,}872$$

$$\alpha_2 = 1{,}6 - \frac{0{,}296}{4{,}68} = 1{,}536 - \quad ; \quad \beta_2 = 1{,}2 + \frac{0{,}872}{1{,}168} 0{,}4 = 1{,}498 + .$$

Estos números se redondean a 1,49 y 1,53 y al sustituir se encuentra

$$f(1{,}53) = -0{,}008423 ,$$

de manera qug 1,53 es menor que la raíz. Por lo tanto, tomamos $a_1 = 1{,}53$; $b_1 = 1{,}54$ y continuamos así:

$$f(1{,}54) = +0{,}032264 \quad ; \quad f'(1{,}54) = 4{,}1148$$

$$f(1{,}53) = -0{,}008423 \quad ;$$

$$\alpha_3 = 1{,}54 - \frac{32264}{411480} = 1{,}53216 - \quad ; \quad \beta_3 = 1{,}53 + \frac{8423}{40687} = 1{,}53207 + .$$

Sin llevar las aproximaciones más adelante, podemos concluir que tomando:

$$\xi = 1{,}5321 .$$

no cometemos un error que exceda en valor absoluto a 10^{-4}. El paso siguiente daría aproximadamente cerca de ocho decimales en la raíz. Por supuesto, el intervalo (1; 2) con el cual hemos comenzado es demasiado amplio y siempre es aconsejable encontrar por tanteo, como en el método de Horner, uno o dos decimales en la raíz.

Ejemplo 2. Hallar aproximadamente la raíz de la ecuación

$$x = 10^{-x}.$$

Si tomamos logaritmos decimales en ambos miembros esta ecuación se reemplaza por

$$f(x) = x + \log x = 0 ,$$

y por tanteos se encuentra que su raíz está contenida entre 0,3 y 0,4. Las derivadas

$$f'(x) = 1 + \frac{M}{x} \qquad M = 0{,}434295$$

$$f''(x) = -\frac{M}{x^2} ,$$

no se anulan en el intervalo (0,3; 0,4). Con la aproximación que permiten las tablas de logaritmos de seis decimales, se encuentra que

$$f(0{,}3) = -0{,}222879 \quad ; \quad f'(0{,}3) = 2{,}44765$$

$$f(0{,}4) = +0{,}002060 .$$

Por ser la segunda derivada negativa, tomamos $\alpha = 0{,}3$; $\beta = 0{,}4$, y entonces

$$\alpha_1 = 0{,}3 + \frac{222879}{244765} = 0{,}391 + \quad ; \quad \beta_1 = 0{,}4 - \frac{206}{224939} = 0{,}3991 - .$$

Estos números se redondean a 0,391 y 0,399. Probando 0,399 se encuentra que

$$f(0{,}399) = -0{,}000027 .$$

Por consiguiente debemos tomar $a_1 = 0{,}399$; $b_1 = 0{,}400$. Luego:

$$f(0{,}399) = -0{,}000027 \quad ; \quad f'(0{,}399) = 2{,}08846 ;$$

$$f(0{,}400) = 0{,}002060 \quad ;$$

$$\alpha_2 = 0{,}399 + \frac{27}{208846} = 0{,}3990129 + \quad ; \quad \beta_2 = 0{,}400 - \frac{2060}{2087} \times 10^{-3} = 0{,}399013 - .$$

Por lo tanto, con la aproximación que puede lograrse con tablas de seis decimales, la raíz pedida es:

$$\xi = 0{,}399013 .$$

Problemas

Aplíquese el método de Newton a las ecuaciones:

1. $x^3 - 3x + 1 = 0$.

2. $x^3 + 4x^2 - 7 = 0$.

3. $x^3 - 7x + 7 = 0$.

4. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

5. $2^x = 4x$. Hágase $x \log 2 - \log x - \log 4 = 0$.

6. $x - \operatorname{sen} x = \dfrac{\pi}{2}$.

7. $x^2 - \log x = {}^3/_2$.

8. $x = \cos x$.

9. $x^x = 1000$.

10. ¿Para qué ángulos centrales el arco de circunferencia es de longitud doble de la cuerda subtendida en el arco?

11. Si el área de un sector de círculo está bisectada por su cuerda, ¿cuál es el ángulo al centro?

12. Una cuerda determina un segmento igual a la tercera parte del área del círculo: ¿cuál es el ángulo al centro subtendido por la cuerda?

13. Un tronco cilíndrico de madera de peso específrico ${}^2/_3$ flota en el agua. ¿A qué profundidad se hunde?

* **14.** Determínese el menor número α tal que la desigualdad

$$e^{-\alpha x} \leqq \frac{1}{1 + x^2} ,$$

se cumpla para todo x positivo.

* **15.** Escribiendo una ecuación $f(x) = 0$ en la forma

$$\frac{f(x)}{\sqrt{\pm f'(x)}} = 0 ,$$

y aplicando el método de Newton, se obtiene la siguiente fórmula para la segunda aproximación:

$$x' = x - \frac{f(x)\,f'(x)}{f'(x)^2 - {}^1/_2\, f(x)\,f''(x)}\,.$$

Demuéstrese que la derivada del segundo miembro es siempre positiva si $f(x)$ tiene sólo raíces reales. Por lo tanto, demuéstrese que la iteración siempre converge independientemente de cómo se elija la primera aproximación. Si la primera aproximación se elige entre dos raíces consecutivas α y β de la derivada $f'(x)$, la iteración converge y muy rápidamente a la raíz de $f(x) = 0$ que queda entre α y β. Examínese la cuestión de la rapidez de la convergencia en la proximidad de la raíz. Aplíquese este método a los ejemplos:

$$(a)\ x^3 - 3x + 1 = 0 \quad ; \quad (b)\ x^3 - 7x + 7 = 0\,.$$

¿Qué proceso de iteración resulta en el caso de una ecuación $x^n - a = 0$?

CAPITULO IX

DETERMINANTES Y MATRICES

1. **Determinantes de segundo orden.** — Las expresiones conocidas como determinantes tiene su origen natural en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas. Supongamos que tenemos que resolver el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \qquad [1]$$

con incógnitas x e y. Para ello podemos tratar de combinar estas ecuaciones para eliminar y ó x: Para eliminar y, las ecuaciones [1] se multiplican, respectivamente, por b_2 y $-b_1$ y se suman los resultados; usando como factores $-a_2$ y a_1 y sumando se eliminará x. Las ecuaciones, una sólo en x y otra sólo en y, obtenidas de esta manera, son:

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x &= c_1 b_2 - c_2 b_1 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y &= c_2 a_1 - c_1 a_2. \end{aligned} \qquad [2]$$

Por la manera en que se obtuvieron las ecuaciones [2] se satisfacen para los valores x, y que satisfacen al sistema [1], de modo que todas las soluciones de este sistema se encuentran entre las soluciones del sistema [2]. Notemos ahora que en ambas ecuaciones [2] x e y tienen el mismo coeficiente

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

y, si este coeficiente no es cero, los únicos valores de x e y que satisfacen las ecuaciones [2] son

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad ; \quad y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \qquad [3]$$

Por lo tanto, si ésos son los únicos valores de las incógnitas que pueden satisfacer al sistema original [1], puede verificarse por sustitución que x e y en la forma dada por [3] satisfacen también a las ecuaciones [1]. Examinando las expresiones [3] notamos que x e y aparecen como fracciones con denominador común

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Esta expresión se llama determinante del sistema [1] y se indica con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Examinando los numeradores de las fórmulas [3] se ve inmediatamente que también son determinantes

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 \quad ; \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 .$$

En consecuencia, x e y quedan expresados como cocientes de los determinantes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} . \qquad [4]$$

En el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

tenemos dos *filas* a_1, b_1 y a_2, b_2 y dos *columnas* $\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$ y $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$; a_1, b_1, a_2, b_2 se llaman *elementos* del determinante. Los determinantes de los numeradores se obtienen reemplazando en

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

los elementos de la primera y segunda columnas por c_1 y c_2, respectivamente.

Por medio de las fórmulas [4], las soluciones del sistema dado pueden ser calculadas fácilmente siempre que el determinante de este sistema no sea cero. Los casos que pueden presentarse cuando este determinante es cero se examinarán más adelante al referirnos a la resolución general de los sistemas de cuaciones lineales con cualquier número de incógnitas.

Ejemplo 1. Si queremos resolver el sistema

$$7x - 3y = 1 \quad ; \quad 6x + 5y = 3,$$

aplicando las fórmulas (4), calculamos los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 53; \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 14; \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

y dividiendo los dos últimos por el primero, hallamos:

$$x = \frac{14}{53} \quad ; \quad y = \frac{15}{53}\,.$$

Problemas

Resolver por determinantes

1. $6x + 2y = 25,$
$7x + 3y = 20.$

2. $5x - 3y = 1,$
$4x + 7y = 5.$

3. $10x - 7y = 1,$
$15x - 11y = 2.$

4. $21x + 13y = 1,$
$5x + 3y = 1.$

5. $ax + (a+1)y = 1,$
$a^2 x + (a^2 - 1)y = a.$

6. $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a,$
$x - y = 4ab.$

7. $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 1,$
$\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 1.$

8. $3x - 4y = 2xy,$
$4x - 5y = 3xy.$

2. **Polinomios con varias variables.** — Considerando las letras a_1, b_1, a_2, b_2 como indeterminadas o variables, vemos que el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1\,,$$

es una función racional entera o un polinomio de cuatro variables a_1, b_1, a_2, b_2.

No sólo en la discusión de los determinantes sino también más adelante, tendremos ocasión de tratar con funciones racionales enteras o polinomios de varias variables, y es necesario explicar qué significado se da a estos términos. Siendo las letras $x, y, z, \ldots$ variables o indeterminadas, una expresión de la forma

$$A\, x^\alpha\, y^\beta\, z^\gamma \ldots$$

donde A es una constante numérica y los exponentes α, β, γ, ... son enteros positivos, se llama monomio de variables $x, y, z, \ldots$, siendo A su coeficiente. Monomios semejantes son aquellos en que los exponentes de las mismas letras son iguales. Una expresión que consta de varios monomios vinculados entre sí por los signos $+$ ó $-$ se llama *función racional entera* de variables $x, y, z, \ldots$ o polinomio en $x, y, z, \ldots$, mientras que los monomios que lo componen se llaman términos. Todo polinomio puede escribirse de modo que los monomios que lo constituyen

no sean semejantes; tal forma puede llamarse *forma reducida*. En los ejemplos siguientes:

$$x - 2y \quad ; \quad x^2 + xy + y^2 \quad ; \quad x^4 - x^3 y + x^2 - y + 1 ,$$

tenemos polinomios de dos variables presentados en forma reducida. Las expresiones

$$x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz \quad ; \quad x^3 y + y^3 z + z^3 x \quad ; \quad 2x^2 y^2 z^2 + x + y + z ,$$

son polinomios de tres variables, y en la misma forma pueden escribirse ejemplos de polinomios de cuatro o más variables. Dos polinomios con las mismas variables se consideran iguales si, presentados en forma reducida, sus términos semejantes son idénticos. Nótese que escribiendo términos con coeficiente cero, o por el contrario, eliminando éstos, el polinomio no cambia. Un polinomio es idénticamente nulo si los coeficientes de todos sus términos son cero. Se consideran conocidas de los cursos elementales de álgebra la suma, resta y multiplicación de polinomios. Los polinomios de varias variables se clasifican de acuerdo a su grado. La suma de los exponentes de las variables en un monomio constituye el *grado*. El grado máximc de los monomios que componen un polimonio que no sea idénticamente nulo es el *grado del polinomio*.

Así los polinomios

$$x^3 + x^2 y - 3x^2 + y + 1 \quad ; \quad x^2 y^2 z^2 + x^4 z + x^2 y - x + 4y ,$$

son, respectivamente, de tercero y cuarto grado. Un polinomio se llama *homogéneo* de grado m si todos los momentos que lo constituyen tienen el mismo grado m. Así, los polinomios

$$x + 2y - 3z \quad ; \quad x^2 - xy + y^2 \quad ; \quad x^2 y^2 + x^4 + z^4 - 3x^2 yz ,$$

son polinomios homogéneos de primero, segundo y cuarto grados.

Los polinomios homogéneos son llamados a menudo *expresiones*. Las expresiones de primer grado se llaman expresiones lineales; las de segundo, tercero,... se llaman expresiones cuadráticas, cúbicas, etc. La expresión lineal general de variables, x, y, z, . . ., v es

$$ax + by + cz + \ldots + lv ,$$

donde a, b, c, . . ., l son constantes. A menudo, al operar con funciones racionales enteras de varias variables, se presta especial atención a algunas de estas variables, por ejemplo: x, y, . . ., t y la función se escribe como un polinomio en x, y, . . ., t cuyos coeficientes son polinomios en las restantes variables. También aquí podemos hablar del grado de

esta función con respecto a las variables elegidas, o del grado general si es homogéneo. Así, la función racional entera en cuatro variables

$$xz + yt,$$

es lineal y homogénea con respecto a x, y y también lo es con respecto a z, t. Del mismo modo

$$zxy + t^2 x^2 + (z^2 + t^2)\, y^2,$$

es homogénea de segundo grado con respecto a x, y; escribiendo la misma expresión en la forma

$$y^2 z^2 + (x^2 + y^2)\, t^2 + xyz,$$

podemos decir que es de segundo grado en z, t, pero no homogénea.

Problemas

1. ¿Cuáles son los grados de los siguientes polinomios?

(*a*) $xyz + x^2 y + y^2 x + 1$. (*b*) $x^3 y + y^3 z + 6\, x^2 y^2 z$.

(*c*) $(2\, x^2 + xy)\,(z^3 - 1) + x^2 y^2$. (*d*) $(z^2 - xy)^2 x - 7\, x^4 z^2$.

2. ¿Cuáles de los siguientes polinomios son homogéneos y cuáles no lo son?

(*a*) $x^3 + y^3 - 3\, xyz$. (*b*) $x^3 + y^3 + x^2 y - 3\, xy$.

(*c*) $x^4 - 6\, x^2 y^2 + z^4 - 2\, x^2 y^2 t^2$. (*d*) $x^3 + y^3 + z^3 - 3\, xyz$.

3. Demostrar que un polinomio en x, y, z es divisible por $(x - y)\,(x - z)\,(y - z)$ si se anula para $x = y$, $x = z$, $y = z$.

4. Hallar un polinomio homogéneo de cuarto grado en las variables x, y, z que se anule para $x = y$, $x = z$, $y = z$ y tome valores 1, 2, 3, respectivamente, para

$$\begin{array}{lll} x = -1, & y = 1, & z = 0, \\ x = 1, & y = -1, & z = 0, \\ x = 0, & y = 1, & z = -1. \end{array}$$

5. Demostrar que $x^3 + y^3 + z^3 - 3\, xyz$ tiene un factor $x + y + z$ y hallar el otro factor. Demostrar que este factor no puede anularse para valores reales de x, y, z excepto cuando $x = y = z$.

3. **Propiedades características de los determinantes de segundo orden.** — Volviendo al determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

se advierte a primera vista que es una función de las variables a_1, b_1, a_2, b_2 y tiene las siguientes propiedades:

1. Ordenadas las variables en un cuadro

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

llamado *matriz,* el determinante es una función lineal homogénea de los elementos de cada fila de esta matriz.

2. El determinante se anula si dos filas son idénticas.

3. Para la matriz especial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el determinante toma el valor 1.

Veremos ahora que con estas propiedades queda totalmente caracterizado el determinante de segundo orden.

Establezcamos ahora el problema más general de hallar todas las funciones racionales enteras de cuatro elementos de una matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

que poseen las dos propiedades siguientes:

1. Son funciones lineales homogéneas de los elementos de cada fila.
2. Se anulan si dos filas de la matriz son idénticas.

Por la primera propiedad la función que buscamos debe ser de la forma:

$$Aa_1 + Bb_1 = F(a_1, b_1, a_2, b_2)\,,$$

y A y B son, a su vez, expresiones lineales y homogéneas en a_2, b_2:

$$A = C_1 a_2 + C_2 b_2 \qquad B = D_1 a_2 + D_2 b_2\,,$$

de modo que

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) = (C_1 a_2 + C_2 b_2)\, a_1 + (D_1 a_2 + D_2 b_2)\, b_1\,, \tag{1}$$

de coeficientes C_1, C_2; D_1, D_2 independientes de a_1, b_1; a_2, b_2. Reemplazando a_1, b_1; a_2, b_2, respectivamente, por $a_1 + a_2$; $b_1 + b_2$; $a_2 + a_1$, $b_2 + b_1$, tendremos, por la segunda propiedad

$$F(a_1 + a_2\ ,\ b_1 + b_2\ ,\ a_2 + a_1\ ,\ b_2 + b_1) = 0\,,$$

porque dos filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \end{pmatrix},$$

son idénticas. Por otra parte, por ser F una función lineal homogénea con respecto a los dos primeros argumentos, tenemos que:

$$F(a_1 + a_2 \ , \ b_1 + b_2 \ , \ a_2 + a_1 \ , \ b_2 + b_1) =$$
$$= F(a_1, b_1, a_2 + a_1, b_2 + b_1) + F(a_2, b_2, a_2 + a_1, b_2 + b_1).$$

Teniendo en cuenta que F también es lineal y homogénea con respecto a los dos últimos argumentos, tenemos:

$$F(a_1, b_1, a_2 + a_1, b_2 + b_1) = F(a_1, b_1, a_2, b_2) + F(a_1, b_1, a_1, b_1)$$
$$F(a_2, b_2, a_2 + a_1, b_2 + b_1) = F(a_2, b_2, a_2, b_2) + F(a_2, b_2, a_1, b_1).$$

Pero, aplicando nuevamente la segunda propiedad

$$F(a_1, b_1, a_1, b_1) = 0 \quad ; \quad F(a_2, b_2, a_2, b_2) = 0 \, ,$$

en consecuencia

$$F(a_1, b_1, a_2 + a_1, b_2 + b_1) = F(a_1, b_1, a_2, b_2)$$
$$F(a_2, b_2, a_2 + a_1, b_2 + b_1) = F(a_2, b_2, a_1, b_1)$$

y

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) + F(a_2, b_2, a_1, b_1) =$$
$$= F(a_1 + a_2, b_1 + b_2, a_2 + a_1, b_2 + b_1) = 0 \, ,$$

o sea

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) = - F(a_2, b_2, a_1, b_1) \qquad [2]$$

Esto significa que F cambia de signo cuando dos filas de la matriz de la que depende se intercambian. Por [1]

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) = (C_1 a_2 + C_2 b_2)\, a_1 + (D_1 a_2 + D_2 b_2)\, b_1 \, ,$$
$$F(a_2, b_2, a_1, b_1) = (C_1 a_1 + C_2 b_1)\, a_2 + (D_1 a_1 + D_2 b_1)\, b_2 \, ,$$

que combinadas con [2] conducen a la identidad:

$$(C_1 a_2 + C_2 b_2)\, a_1 + (D_1 a_2 + D_2 b_2)\, b_1 =$$
$$= - (C_1 a_1 + C_2 b_1)\, a_2 - (D_1 a_1 + D_2 b_1)\, b_2 \, ,$$

y de esta identidad se desprende que:

$$C_1 = 0 \, , \quad D_2 = 0 \, , \quad C_2 = - D_1 \, .$$

Sustituyendo $C_1 = 0$, $D_2 = 0$, $C_2 = C$, $D_1 = - C$ en la expresión de F tendremos

$$F(a_1, b_1, a_2, b_2) = C\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) = C \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

y en consecuencia todas las funciones de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

que satisfacen las propiedades 1 y 2 difieren del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

sólo por un factor independiente de las variables a_1, b_1; a_2, b_2. En particular, si además de las condiciones 1 y 2 la función que buscamos toma el valor 1 para la matriz especial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

será idéntica con el determinante antes mencionado.

Todas las propiedades de los determinantes de segundo orden se deducen fácilmente si los consideramos como funciones de una matriz que satisfaga las propiedades características 1, 2 y 3. Más adelante discutiremos desde el mismo punto de vista las propiedades de los determinantes en general, y aquí nos limitaremos a demostrar cómo puede establecerse fácilmente el teorema de multiplicación para determinantes de segundo orden.

Sean dos determinantes:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Sumando los productos de los elementos de cada una de las filas de D_1 por los elementos correspondientes de las columnas de D_2, formamos un nuevo determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 & a_1 d_1 + b_1 d_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 & a_2 d_1 + b_2 d_2 \end{vmatrix}.$$

El teorema de multiplicación de determinantes establece que:

$$D = D_1 . D_2 .$$

Para demostrar este teorema consideremos a_1, b_1; a_2, b_2 como variables. Entonces D es una función lineal de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

homogénea en los elementos de cada fila, que se anula cuando dos filas son idénticas. En consecuencia

$$D = C \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

donde C no depende de las variables a_1, b_1; a_2, b_2. Para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D se reduce al determinante

$$\begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = D_2$$

y $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{se hace} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Por lo tanto:

$$C = D_2$$

y

$$D = D_1 D_2\,,$$

como deseábamos demostrar.

Problemas

1. Verificar las siguientes propiedades de los determinantes:

(a) $$\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}.$$

(b) $$\begin{vmatrix} a+e & b+g \\ c+f & d+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & g \\ c & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & g \\ f & h \end{vmatrix}.$$

2. Verificar la identidad:

$$\begin{vmatrix} a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma & a\,\alpha' + b\,\beta' + c\,\gamma' \\ a'\,\alpha + b'\,\beta + c'\,\gamma & a'\,\alpha' + b'\,\beta' + c'\,\gamma' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}.$$

Hágase uso de las identidades del Problema 1.

3. Deducir del Problema 2 que:

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (xx' + yy' + zz')^2 +$$
$$+ (xy' - x'y)^2 + (xz' - x'z)^2 + (yz' - y'z)^2.$$

4. ¿Qué identidad similar a la del Problema 2 puede hallarse para el siguiente determinante?

$$\begin{vmatrix} a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma + d\,\delta & a\,\alpha' + b\,\beta' + c\,\gamma' + d\,\delta' \\ a'\,\alpha + b'\,\beta + c'\,\gamma + d'\,\delta & a'\,\alpha' + b'\,\beta' + c'\,\gamma' + d'\,\delta' \end{vmatrix}.$$

5. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} x + iy & -z + it \\ z + it & x - iy \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' - iy' & z' - it' \\ -z' - it' & x' + iy' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P + iQ & -R + iS \\ R + iS & P - iQ \end{vmatrix}$$

donde

$$P = xx' + yy' + zz' + tt' \quad ; \quad Q = -xy' + yx' + zt' - tz',$$

$$R = -xz' + yt' - zx' - ty' \quad ; \quad S = -xt' + yz' - zy' + tx'.$$

Dedúzcase, de allí, la identidad de Euler:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2) = (xx' + yy' + zz' + tt')^2 +$$
$$+ (xy' - yx' - zt' + tz')^2 + (xz' - yt' + zx' + ty')^2 + (xt' - yz' + zy' - tx')^2.$$

4. **Los determinantes como funciones de las matrices.** — Como hemos visto, los determinantes de segundo orden pueden ser expresados como funciones de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

que poseen ciertas propiedades características. Nada nos impide generalizar estas consideraciones. En lugar de una matriz de cuatro elementos podemos considerar una matriz de n^2 elementos

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \dots l_n \end{pmatrix}$$

ordenados en n filas y n columnas, y buscar todas las funciones racionales enteras de los n^2 elementos de esta matriz, considerados como variables, que poseen las tres propiedades siguientes:

1. Son funciones lineales homogéneas de los elementos de cada fila de la matriz.
2. Se anulan idénticamente si dos filas de la matriz son idénticas.
3. Toman el valor 1 para la matriz especial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son todos ceros excepto los de la diagonal principal, que son iguales a 1.

Veremos que existe una sola función racional entera que satisface estas exigencias, y esta función se llama determinante de n^2 elementos o de orden enésimo, y se lo representa con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \dots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \dots l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \dots l_n \end{vmatrix} .$$

5. **Determinantes de tercer orden.** — El método para la solución del problema general enunciado en el párrafo 4 se entenderá mejor si consideramos primero el caso particular de $n = 3$. Será conveniente adoptar una notación especial para los elementos de la matriz. En lugar de usar letras e índices diferentes para distinguir elementos y filas distintos, usaremos la misma letra con dos índices, por ejemplo: a_{ij}, indicando el primer índice el número de la fila (de arriba hacia abajo) y el segundo índice el número de la columna (de izquierda a derecha) en que se encuentra la letra. Así, en el caso de $n = 3$ la matriz será:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Las filas de esta matriz se designarán con las letras R_1, R_2, R_3 y un símbolo tal como $R_1 + R_2$ representará una fila compuesta de los elementos

$$a_{11} + a_{21} \ ; \ a_{12} + a_{22} \ ; \ a_{13} + a_{23} .$$

Designaremos con el símbolo

$$F(R_1, R_2, R_3) ,$$

la función de los nueve elementos a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ que satisface las condiciones 1, 2 y 3 del párrafo 4. Partiendo de la propiedad 1 y 2 puede demostrarse que esta función cambia su signo si dos filas R se intercambian de modo que

$$\begin{aligned} F(R_2, R_1, R_3) &= -F(R_1, R_2, R_3) \\ F(R_3, R_2, R_1) &= -F(R_1, R_2, R_3) \\ F(R_1, R_3, R_2) &= -F(R_1. R_2, R_3) \end{aligned} \qquad [1]$$

Siendo la demostración la misma en todos los casos, basta probar la primera de estas identidades. Consideremos la función

$$F(R_1 + R_2 \ , \ R_2 + R_1 \ , \ R_3) .$$

Por ser F una función lineal y homogénea de los elementos de la primera fila de la matriz, tenemos:

$$F(R_1 + R_2\ ,\ R_2 + R_1\ ,\ R_3) = F(R_1\ ,\ R_2 + R_1\ ,\ R_3) + \\ + F(R_2\ ,\ R_2 + R_1\ ,\ R_3)\,.$$

Además, siendo F lineal y homogénea con respecto a los elementos de la segunda fila, tenemos:

$$F(R_1, R_2 + R_1, R_3) = F(R_1, R_2, R_3) + F(R_1, R_1, R_3)$$

$$F(R_2, R_2 + R_1, R_3) = F(R_2, R_2, R_3) + F(R_2, R_1, R_3)$$

y

$$F(R_1 + R_2, R_2 + R_1, R_3) = F(R_1, R_2, R_3) + F(R_2, R_1, R_3) + \\ + F(R_1, R_1, R_3) + F(R_2, R_2, R_3)\,.$$

Por la segunda propiedad, F se anula cuando dos filas son idénticas, por lo tanto:

$$F(R_1 + R_2, R_2 + R_1, R_3) = 0\,,\quad F(R_1, R_1, R_3) = 0\,,$$
$$F(R_2, R_2, R_3) = 0\,.$$

Debido a ésto, las identidades precedentes se reducen a:

$$0 = F(R_1, R_2, R_3) + F(R_2, R_1, R_3)$$

$$F(R_2, R_1, R_3) = -F(R_1, R_2, R_3)\,,$$

como deseábamos demostrar.

Además, siendo F lineal y homogénea con respecto a los elementos de cada una de las filas R_1, R_2, R_3 estará constituída sólo por términos de la forma

$$A_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma}\,,$$

donde $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ es independiente de los elementos a_{ij} y donde los índices α, β, γ pueden tomar los valores 1, 2, 3. Usando el signo de sumatoria, F puede escribirse así:

$$F = \Sigma\, A_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma}\,,$$

y queda por ver qué otras condiciones deben reunir los coeficientes $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ para que se cumpla la condición 2. La condición 1 se satisface independientemente de los valores de estos coeficientes. Las identidades [1] se desprenden de la condición 2 y, recíprocamente, la satisfacen. Basta, por lo tanto, que:

$$F(R_1, R_2, R_3) = \Sigma\, A_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma}\,,$$

satisfaga las identidades [1]. Ahora:

$$F(R_2, R_1, R_3) = \Sigma\, A_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_{2\alpha}\, a_{1\beta}\, a_{3\gamma}\,,$$

o bien, poniendo α en lugar de β y β en lugar de α, lo que puede hacerse puesto que α y β toman los mismos valores:

$$F(R_2, R_1, R_3) = \Sigma\, A_{\beta,\alpha,\gamma}\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma}\,.$$

Aquí también α, β, γ están comprendidos entre los valores 1, 2, 3. Así:

$$\Sigma\, A_{\beta,\alpha,\gamma}\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} = -\Sigma\, A_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma}\,,$$

y esta identidad implica que:

$$A_{\beta,\alpha,\gamma} = -A_{\alpha,\beta,\gamma}\,. \qquad [2a]$$

En la misma forma

$$A_{\gamma,\beta,\alpha} = -A_{\alpha,\beta,\gamma}\,, \qquad [2b]$$

$$A_{\alpha,\gamma,\beta} = -A_{\alpha,\beta,\gamma}\,. \qquad [2c]$$

Si dos de los índices α, β, γ son iguales, el coeficiente correspondiente será cero. Porque si, por ejemplo, $\alpha = \beta$, tenemos por [2a]

$$A_{\alpha,\alpha,\gamma} = -A_{\alpha,\alpha,\gamma}\,.$$

Es decir: $A_{\alpha,\alpha,\gamma} = 0$.

Por lo tanto, en la expresión de F sólo aparecen los términos correspondientes a distintos valores de α, β, γ; $\alpha\beta\gamma$ debe ser una de las seis permutaciones de los números 1, 2, 3. Estas seis permutaciones son

123	213
231	321
312	132

y, por [2a], [2b] y [2c] entre los coeficientes correspondientes existen las siguientes relaciones:

$$A_{2,1,3} = -A_{1,2,3}\,; \qquad A_{2,3,1} = -A_{2,1,3} = A_{1,2,3}\,;$$

$$A_{3,2,1} = -A_{2,3,1} = -A_{1,2,3}\,; \quad A_{3,1,2} = -A_{3,2,1} = A_{1,2,3}\,;$$

$$A_{1,3,2} = -A_{1,2,3}\,,$$

de modo que los cinco coeficientes pueden ser expresados por el sexto. Haciendo, para abreviar:

$$A_{1,2,3} = C\,,$$

tendremos:

$$A_{1,\,2,\,3} = A_{2,\,3,\,1} = A_{3,\,1,\,2} = C\,,$$
$$A_{2,\,1,\,3} = A_{3,\,2,\,1} = A_{1,\,3,\,2} = -\,C\,,$$

y

$$F = C\,(a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - $$
$$- a_{11}\,a_{23}\,a_{32})\,.$$

Tal es la expresión general de las funciones que satisfacen las condiciones 1 y 2. Si, además, F toma el valor 1 para la matriz particular

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

considerando que la expresión por la que está multiplicado C toma el valor 1 para esta matriz, es evidente que $C = 1$. En consecuencia, existe sólo una función racional entera de nueve elementos a_{ij}, que satisface las condiciones 1, 2 y 3, que es:

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,.$$

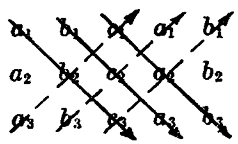
Esta expresión se llama determinante de nueve elementos o de tercer orden y se representa por el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

No desarrollaremos aquí las propiedades del determinante de terces orden, pero es muy fácil estudiarlos en el caso general de determinanter de cualquier orden. Nos concretaremos a dar una regla mnemotécnica para la formación de los términos del determinante de tercer orden, que vale sólo en este caso particular. Para escribir los seis términos del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

formamos una tabla



y tomamos los productos de los elementos de las diagonales descendentes con signo + y los de las ascendentes con signo —. El conjunto de los seis términos así obtenidos:

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1,$$

será el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Por ejemplo, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

hallado por esta regla es:

$$5 + 24 + 36 - 18 - 8 - 30 = 9.$$

Problemas

Las siguientes propiedades valen para los determinantes de cualquier orden y serán comprobadas más adelante de manera general. Para determinantes de tercer orden pueden ser verificadas fácilmente.

1. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

¿Cómo puede expresarse en palabras esta propiedad?

2. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

y que

$$\begin{vmatrix} ma_1 & nb_1 & pc_1 \\ ma_2 & nb_2 & pc_2 \\ ma_3 & nb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. De acuerdo a lo establecido en los Problemas 1 y 2, demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

¿Cuáles son los resultados correspondientes si la primera columna se deja invariable pero b_1, b_2, b_3 (ó c_1, c_2, c_3) se reemplazan por $b_1 + d_1$, $b_2 + d_2$, $b_3 + d_3$ (ó $c_1 + d_1$, $c_2 + d_2$, $c_3 + d_3$)? ¿Existe una propiedad similar con respecto a las filas?

5. Demostrar que un determinante de tercer orden no varía si a los elementos de una fila (o columna) cualquiera se le suman los elementos de otra fila (o columna) multiplicados por un factor arbitrario.

6. Demostrar que

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0. \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Demostrar que

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(b)\ \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 + ac & 1 + bc \\ 1 & 1 + ad & 1 + bd \\ 1 & 1 + ae & 1 + be \end{vmatrix} = 0.$$

9. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}.$$

10. Un determinante puede desarrollarse por los elementos de una fila o columna cualquiera. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

En estos desarrollos los elementos de una fila o columna están multiplicados por determinantes de orden 2 tomados con signo + ó —, que se obtienen eliminando la fila y la columna a las que pertenece el elemento que se considera. Hallar una regla para determinar cuándo se usa un signo + y cuándo —. Estos desarrollos disminuyen rápidamente el orden de un determinante en el que todos los elementos menos uno en una fila o una columna son ceros.

11. Utilícese el método indicado en el Problema 10 para hallar el valor numérico de los determinantes (*a*) y (*b*) del problema 7.

12. Demostrar que

(*a*) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c - a)(c - b)(b - a).$$

(*b*) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (c - a)(c - b)(b - a)(a + b + c).$$

13. Hallar el valor numérico de los determinantes

(*a*) $$\begin{vmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$ (*b*) $$\begin{vmatrix} 10 & 5 & 4 \\ 8 & 11 & 7 \\ 6 & 12 & 14 \end{vmatrix}$$

14. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ -a & x & c \\ -b & -c & x \end{vmatrix} = x(x^2 + a^2 + b^2 + c^2).$$

6 **Permutaciones pares e impares.** — Para explicar un determinante de orden superior, el procedimiento a usar es totalmente análogo al empleado en el caso de determinantes de tercer orden, excepto que será necesario expresar algunas propiedades de las permutaciones, que

en ese caso particular no eran tan necesarias como lo son en el caso general. Sean los números 1, 2, 3, ..., n escritos en orden creciente

$$1 \quad 2 \quad 3 \ldots n.$$

Este se llamará orden natural. Colocando estos enteros de modo que el primer lugar sea ocupado por i_1, el segundo por i_2, el tercero por i_3, etc., tenemos una permutación

$$i_1 \quad i_2 \quad i_3 \ldots i_n.$$

Así

$$6 \quad 5 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 2,$$

es una permutación de seis números 1, 2, 3, 4, 5, 6. El número de permutaciones de n números es:

$$1.2.3 \ldots n = n!$$

Luego, el número de las permutaciones de 2, 3, 4, 5, 6, 7 números es, respectivamente:

$$2! = 2\ ;\ 3! = 6\ ;\ 4! = 24\ ;$$

$$5! = 120\ ;\ 6! = 720\ ;\ 7! = 5040.$$

Intercambiando en una permutación

$$i_1 i_2 \ldots i_\alpha i_{\alpha+1} \ldots i_\beta \ldots i_n,$$

dos elementos i_α e i_β y dejando los otros elementos en sus lugares, pasamos a otra permutación

$$i_1 \ldots i_\beta \ldots i_\alpha \ldots i_n,$$

que resulta de la anterior por una transposición de i_α e i_β.

Toda permutación puede obtenerse de la permutación

$$1 \quad 2 \quad 3 \ldots n,$$

en la que los elementos están colocados en orden natural, por una serie de sucesivas transposiciones. Por ejemplo, la permutación

$$7 \quad 6 \quad 8 \quad 3 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \quad 2$$

puede obtenerse de

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8,$$

realizando sucesivamente las siguientes transposiciones: (*a*) 1 y 6; (*b*) 2 y 8; (*c*) 3 y 4; (*d*) 4 y 7; (*e*) 6 y 8; (*f*) 7 y 8. También puede obtenerse por otra serie de transposiciones: (*a*) 1 y 4; (*b*) 1 y 7; (*c*) 2 y 8; (*d*) 3 y 8; (*e*) 6 y 1; (f) 6 y 4; (*g*) 6 y 7; (*h*) 6 y 3.

En general hay una infinita variedad de formas de pasar de una permutación a otra por una serie de sucesivas transposiciones. Pero es importante establecer que el número de transposiciones usado para ello es siempre par o impar, no importa qué transposiciones se empleen. La prueba de este hecho puede basarse en la noción de *inversión*. Si en una permutación

$$i_1\ i_2 \ldots i_n\,,$$

un elemento i_α es seguido por un elemento menor, decimos que hay una inversión relativa a i_α y a ese elemento. El número de elementos que siguen a i_α y que son menores que él, da el número total de inversiones relativas a i_α. El número de inversiones relativo a todos los elementos de una permutación puede llamarse el *índice I* de esa permutación. El índice es un número completamente determinado por la permutación. Considerando, por ejemplo, la permutación

$$7\quad 6\quad 8\quad 5\quad 3\quad 1\quad 4\quad 2\,,$$

contamos

Número de inversiones	relativas a
6	7
5	6
5	8
2	3
3	5
0	1
1	4

El índice de la permutación es, por lo tanto:

$$I = 6 + 5 + 5 + 2 + 3 + 0 + 1 = 22\,.$$

Lema: *Si en una permutación*

$$i_1\ i_2 \ldots i_n\,,$$

dos elementos i_α e i_β se transponen, el índice varía en un número impar.

Demostracion: Supongamos primero que i_β siga inmediatamente a i_α, de modo que $\beta = \alpha + 1$. Al contar el número de inversiones es conveniente dividir la permutación en tres partes:

$$i_1\, i_2 \ldots i_{\alpha-1}\ ;\ i_\alpha\, i_{\alpha+1}\ ;\ i_{\alpha+2} \ldots i_n\,.$$

Sea A el número de inversiones relativo a la primera parte, y B el relativo a la tercera parte, siendo P y Q los números de inversiones relativos a i_α e $i_{\alpha+1}$. Entonces:

$$I = A + B + P + Q\,.$$

Luego de transponer i_α e $i_{\alpha+1}$ tenemos otra permutación, que está a su vez dividida en tres secciones:

$$i_1 \, i_2 \, \ldots \, i_{\alpha-1} \;\; ; \;\; i_{\alpha+1} \, i_\alpha \;\; ; \;\; i_{\alpha+2} \, \ldots \, i_n \, .$$

Su índice I', llamando P' y Q' los números de inversiones relativos a $i_{\alpha+1}$ e i_α, es:

$$I' = A + B + P' + Q'.$$

Sean M y N los números de elementos de la sección

$$i_{\alpha+2} \, \ldots \, i_n \, ,$$

respectivamente menores que i_α e $i_{\alpha+1}$. Entonces:

$$P = M \;\; ; \;\; Q = N,$$

en caso de que $i_\alpha < i_{\alpha+1}$, y

$$P = M + 1 \;\; ; \;\; Q = N \, ,$$

en caso de que $i_\alpha > i_{\alpha+1}$. Similarmente

$$P' = N + 1 \;\; ; \;\; Q' = M \, ,$$

en caso de que $i_\alpha < i_{\alpha+1}$, y

$$P' = N \;\; ; \;\; Q' = M \, ,$$

en caso de que $i_\alpha > i_{\alpha+1}$. Por lo tanto:

$$P' + Q' - (P + Q) = 1 \quad \text{ó} \quad -1 \, ,$$

según sea $i_\alpha < i_{\alpha+1}$ ó $i_\alpha > i_{\alpha+1}$, y, en consecuencia:

$$I' = I \pm 1 \, ,$$

es decir, el índice crece o decrece en una unidad luego de transponer dos elementos consecutivos.

Supongamos ahora que los elementos transpuestos no sean consecutivos y sea l el número de elementos entre ellos.

Entonces, de la permutación

$$i_1 \, \ldots \, i_\alpha \, \ldots \, i_\beta \, \ldots \, i_n,$$

pasamos a la permutación

$$i_1 \, \ldots \, i_\beta \, \ldots \, i_\alpha \, \ldots \, i_n,$$

por las siguientes transposiciones de elementos consecutivos: (a) l transposiciones de i_α con elementos consecutivos, que lo colocan antes de i_β; (b) una transposición que coloca a i_α en la posición ocupada por i_β, y así i_β precede a i_α; (c) l transposiciones de i_β con los elementos inmediatos que lo llevan al lugar anteriormente ocupado por i_α. El pasaje de una permutación a la otra se cumple así por $2\,l + 1$ transposiciones sucesivas

de elementos consecutivos, y puesto que en cada transposición aumenta o disminuye el índice en una unidad, el índice de la permutación

$$i_1 \ldots i_\beta \ldots i_\alpha \ldots i_n ,$$

difiere del de la permutación

$$i_1 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n ,$$

en un número impar, y de esta manera queda demostrado el enunciado.

Supongamos ahora que la permutación

$$i_1 \; i_2 \; \ldots \; i_n ,$$

se obtiene de

$$1 \; 2 \; \ldots \; n ,$$

por r transposiciones. Por ser cero el índice de la última permutación, y puesto que las r transposiciones provocan incrementos impares $2\,h_1 + 1$, $2\,h_2 + 1, \ldots, 2\,h_r + 1$, el índice I de la permutación

$$i_1 \; i_2 \; \ldots \; i_n ,$$

será

$$I = r + 2\,(h_1 + h_2 + \ldots + h_r) = r + 2\,h .$$

Por lo tanto, r será par o impar según sea I par o impar. Las permutaciones que resultan de $1, 2 \ldots n$ por un número par o impar de transposiciones se llaman, respectivamente, permutaciones pares o impares. La permutación resultante de una permutación par, por una transposición, será impar, y viceversa. Es fácil demostrar que entre las $n!$ permutaciones de $1, 2, 3 \ldots n$ hay igual número de permutaciones pares e impares. Llamamos R y R' los números de permutaciones pares e impares respectivamente. Transponiendo los dos primeros elementos de cada una de las R permutaciones pares, resultan R' permutaciones impares distintas; por lo tanto $R' \geqq R$. Pero, razonando en la misma forma $R \geqq R'$, en consecuencia debe ser $R' = R$. Siendo $n!$ el número total de permutaciones, hay

$$\frac{1}{2} n \,!$$

permutaciones pares e impares.

Supongamos que

$$A_{i_1, i_2, \ldots i_n} ,$$

es una cantidad que depende de n índices distintos $i_1, i_2, \ldots, i_n$, cada uno de los cuales debe ser uno de los números $1, 2, \ldots, n$ de modo que

$$i_1 \; i_2 \; \ldots \; i_n ,$$

es una permutación de estos números. Supongamos además que cada una de las $n!$ cantidades posee la propiedad de cambiar su signo si se

transponen dos índices cualesquiera, sin variar su valor absoluto; en otras palabras, supongamos que:

$$A_{i_1, \ldots, i_\alpha, \ldots, i_\beta, \ldots, i_n} = -A_{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots, i_\alpha, \ldots, i_n}. \qquad [1]$$

Sea $I\ (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ el índice de la permutación $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Por el lema demostrado anteriormente

$$(-1)^{I\,(i_1, i_2, \ldots, i_n)}$$

también satisface la condición [1] y, en consecuencia

$$A_{i_1, i_2, \ldots i_n}/(-1)^{I\,(i_1, i_2, \ldots i_n)}$$

no cambia si se transponen dos índices cualesquiera. Desde que todas las permutaciones resultan de $1, 2, \ldots, n$ por sucesivas transposiciones, se deduce que el cociente anterior tiene el mismo valor para todas las permutaciones. Llamando C a este cociente, tendremos

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \pm C,$$

tomando este cociente el signo + ó — según que la permutación $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_n$ sea par o impar.

Problemas

1. Hallar el número de inversiones en cada una de las permutaciones

(a) 6 8 1 7 5 3 2 4; (b) 2 1 3 9 8 7 6 5 4;
(c) 3 7 6 1 2 5 8 4 9.

2. ¿Cuáles de las siguientes permutaciones son pares y cuáles impares?

(a) 6 3 1 2 5 4; (b) 1 9 2 8 3 7 4 6 5;
(c) 7 1 5 6 3 2 4.

3. Demostrar que la permutación 1 6 5 3 2 4 puede obtenerse de 1 4 5 3 6 2 por un número par de transposiciones.

4. Escribir todas las permutaciones pares y todas las impares de los elementos 1, 2, 3, 4.

7. **Determinantes en general.** — Será fácil dar ahora una definición general de un determinante de orden n. Sea

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matriz de n^2 elementos a_{ij} distribuídos en n filas $R_1, R_2, \ldots, R_n$ y n columnas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Por conveniencia de razonamiento elegimos la notación de los elementos de dos índices, lo que indica claramente la

fila y la columna a las que pertenece el elemento. Considerando estos n^2 elementos como variables, nos proponemos el problema de hallar todas las funciones racionales enteras de ellos que satisfagan las tres condiciones siguientes:

1. Deben ser lineales y homogéneas en los elementos de cada fila de la matriz.
2. Deben anularse idénticamente cuando dos filas sean idénticas.
3. Toman el valor de 1 para la matriz especial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

en la que $a_{ii} = 1$ y $a_{ij} = 0$ para $j \neq i$.

El examen del problema demostrará que hay sólo una función que satisface estas condiciones. La función que buscamos puede indicarse convenientemente por

$$F(R_1, R_2, \dots, R_n).$$

En primer lugar, vamos a demostrar que

$$F(R_1, \dots, R_\alpha, \dots, R_\beta, \dots, R_n) = -F(R_1, \dots, R_\beta, \dots, R_\alpha, \dots, R_n) \quad [1]$$

de modo que F cambia de signo cuando dos filas R_α y R_β se trasponen. Consideremos la función

$$F(R_1, \dots, R_\alpha + R_\beta, \dots, R_\beta + R_\alpha, \dots, R_n).$$

Por ser idénticas las filas $R_\alpha + R_\beta$ y $R_\beta + R_\alpha$, tenemos:

$$F(R_1, \dots, R_\alpha + R_\beta, \dots, R_\beta + R_\alpha, \dots, R_n) = 0. \quad [2]$$

Por otra parte, por ser F lineal y homogénea en los elementos de cada fila

$$\begin{aligned} F(R_1, \dots, R_\alpha + R_\beta, \dots, R_\beta + R_\alpha, \dots, R_n) &= \\ = F(R_1, \dots, R_\alpha, \dots, R_\beta + R_\alpha, \dots, R_n) &+ \\ + F(R_1, \dots, R_\beta, \dots, R_\beta + R_\alpha, \dots, R_n)&, \end{aligned}$$

y por la misma razón:

$$\begin{aligned} F(R_1, \dots, R_\alpha, \dots, R_\beta + R_\alpha, \dots, R_n) &= \\ = F(R_1, \dots, R_\alpha, \dots, R_\beta, \dots, R_n) &+ \\ + F(R_1, \dots, R_\alpha, \dots, R_\alpha, \dots, R_n)& \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(R_1, \dots, R_\beta, \dots, R_\beta + R_\alpha, \dots, R_n) &= \\ = F(R_1, \dots, R_\beta, \dots, R_\beta, \dots, R_n) &+ \\ + F(R_1, \dots, R_\beta, \dots, R_\alpha, \dots, R_n)&. \end{aligned}$$

Considerando la ecuación [2] e identidades similares como ser:

$$F(R_1, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_n) = $$
$$= F(R_1, \ldots, R_\beta, \ldots, R_\beta, \ldots, R_n) = 0,$$

encontramos:

$$0 = F(R_1, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_\beta, \ldots, R_n) + F(R_1, \ldots, R_\beta, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_n)$$

que es equivalente a la ecuación [1]. Recíprocamente, suponiendo que se satisface la ecuación [1], se deduce que:

$$F(R_1, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_n) = 0.$$

Es decir que las condiciones 1 y 2 juntas son equivalentes a la condición 1 y que F se transforma en $-F$ cuando se transponen dos filas.

En virtud de la condición 1 la función pedida consistirá de términos de la forma

$$A_{i_1, i_2 \ldots, i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

donde los índices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ toman independientemente los valores 1, 2, ..., n y donde

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$$

es un coeficiente independiente de las variables a_{ij}. Podemos escribir:

$$F(R_1, R_2, \ldots, R_n) = \Sigma A_{i_1, i_2 \ldots, i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}. \qquad [3]$$

Por transposición de las filas R_α y R_β, tenemos:

$$F(R_1 \ldots, R_\beta, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_n) = \Sigma A_{i_1, i_2 \ldots, i_n} a_{1i_1} \ldots a_{\beta i_\alpha} \ldots a_{\alpha i_\beta} \ldots a_{ni_n}$$

o, reemplazando i_α por i_β y recíprocamente, lo cual es permitido puesto que tanto i_α como i_β toman los mismos valores:

$$F(R_1, \ldots, R_\beta, \ldots, R_\alpha, \ldots, R_n) = \Sigma A_{i_1 \ldots, i_\beta, \ldots, i_\alpha, \ldots, i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} \quad [4]$$

Comparando las ecuaciones [3] y [4] y teniendo en cuenta la identidad [1] llegamos a la conclusión de que:

$$A_{i_1, \ldots, i_\alpha, \ldots, i_\beta, \ldots, i_n} = -A_{i_1, \ldots, i_\beta, \ldots, i_\alpha, \ldots, i_n} \qquad [5]$$

para dos índices cualesquiera α y β distintos tomados entre los números 1, 2, ..., n.

En caso de que $i_\alpha = i_\beta$, de [5]

$$A_{i_1, \ldots i_\alpha, \ldots, i_\alpha, \ldots, i_n} = 0$$

y esto significa que en [3] se encuentran sólo aquellos términos que corresponden a valores distintos $i_1, i_2, \ldots, i_n$, siendo $i_1, i_2, \ldots, i_n$ una

permutación de los números 1, 2, 3, ..., n. De [5] y de acuerdo con lo enunciado al final del párrafo:

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \pm C$$

donde el signo es $+$ ó $-$ según que $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sea una permutación par o impar. Así, todas las funciones F que satisfacen las condiciones 1 y 2 son de la forma

$$F = C \Sigma \pm a_{1i_1} a_{1i_2} \ldots a_{1i_n},$$

donde la sumatoria se extiende a todas las permutaciones de los índices; el signo $\pm$ se elige en la forma indicada y C es una cantidad independiente de los elementos de la matriz. Ahora para la matriz especial en la que $a_{ii} = 1$ y $a_{ij} = 0$ si $j \neq i$, la suma se reduce a un término

$$a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} = 1,$$

y, por otra parte, si se satisface la condición 3, F toma el valor 1, siendo en este caso $C = 1$. Así, si se cumplen todas las condiciones:

$$F = \Sigma \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n},$$

estando la sumatoria extendida a todas las permutaciones 1, 2, ..., n y para cada permutación el producto

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n},$$

tomado con el signo $+$ ó $-$ según que la permutación sea par o impar.

La suma representada por F se llama determinante de enésimo orden o determinante de los n^2 elementos a_{ij} y se representa con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

A veces se usa la notación abreviada

$$| \; a_{ij} \; |$$

que no debe ser confundida, por supuesto, con el valor absoluto de la cantidad a_{ij}.

El número de términos del determinante de orden n es el mismo que el número de permutaciones de n objetos, es decir $n!$, y la mitad de ellos está precedido por el signo $+$ y la otra mitad por el signo $-$.

8. **Propiedades de los determinantes.** — Puesto que el número de términos de un determinante crece muy rápidamente con su orden,

la resolución directa de determinantes basada en su definición es impracticable; pero en muchos casos puede efectuarse, y a menudo sin mucho trabajo, recurriendo a algunas de sus propiedades que ahora examinaremos. Tomemos el término general

$$\pm\, a_{1i_1} a_{2i_2}, \ldots, a_{ni_n}\,.$$

Aquí los segundos índices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ forman una cierta permutación de los números $1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, los factores pueden ser ordenados de modo que estos segundos índices sigan el orden natural mientras los primeros formen una permutación $j_1, j_2, \ldots, j_n$ de los números 1, 2, $\ldots, n$. Así, el mismo término puede escribirse

$$\pm\, a_{j_1 1}\, a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}\,.$$

Ahora, si se usan m transposiciones para pasar de $1\ 2 \ldots n$ a $i_1\, i_2 \ldots i_n$, las mismas transposiciones realizadas en orden inverso volverán a los segundos índices a su orden natural, y colocarán a los primeros índices, originalmente en el orden natural, en el orden $j_1\, j_2 \ldots j_n$. Por lo tanto, las permutaciones $i_1\, i_2 \ldots i_n$ ó $j_1\, j_2 \ldots j_n$ son ambas pares o ambas impares, y el signo $\pm$ puede ser determinado con referencia a la segunda en lugar de referirlo a la primera permutación. En consecuencia, el determinante puede ser presentado como la suma

$$\Sigma \pm a_{j_1 1}\, a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n}\,,$$

extendida a todas las permutaciones de los primeros índices, eligiendo el signo $+$ ó $-$ según que la permutación sea par o impar.

Supongamos ahora que en el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

se reemplazan las filas por las columnas y viceversa; ésto da otro determinante

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

cuyo elemento b_{ij} perteneciente a la i-ésima fila y a la j-ésima fila es a_{ji}. Por definición.

$$D' = \Sigma \pm b_{1j_1}\, b_{2j_2} \ldots b_{nj_n}\,,$$

donde los términos están precedidos por el signo $+$ ó $-$ según que

$j_1 j_2 \ldots j_n$ sea una permutación par o impar. Por ser $b_{ij} = a_{ji}$, podemos escribir también

$$D' = \Sigma \pm a_{j_1 1} a_{j_2 2} \ldots a_{j_n n},$$

pero, por lo dicho anteriormente, la misma suma representa también al determinante D; por lo tanto:

$$D' = D.$$

Este importante resultado puede indicarse brevemente de la siguiente manera: *Un determinante no varía si se intercambian las filas con las columnas y viceversa.* Siendo un determinante *una función lineal homogénea en los elementos de cada fila*, es también *una función lineal homogénea en los elementos de cada columna.* Un determinante *se anula cuando dos de sus filas son idénticas.* Por lo tanto, *también se anula cuando dos de sus columnas son idénticas.* En general, para cualquier propiedad que los determinantes puedan tener con respecto a sus filas, existe una propiedad similar con respecto a sus columnas.

Como se demostró en el Párrafo 7, un determinante *cambia solamente su signo si se intercambian dos filas.* Por lo tanto, *también cambia solamente su signo por intercambio de dos columnas.*

Sea

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$

una función lineal homogénea de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Es evidente que

$$f(mx_1, mx_2, \ldots, mx_n) = mf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

y

$$f(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n) + f(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

Siendo los determinantes lineales y homogéneos con respecto a los elementos de cada fila (y de cada columna) se desprende que reemplazando en un determinante D una fila $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ por $ma_{i1}, ma_{i2}, \ldots, ma_{in}$, o una columna $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ por $ma_{1i}, ma_{2i}, \ldots, ma_{ni}$, el determinante resultante D' es igual a D multiplicado por m:

$$D' = mD$$

o, dicho de otra manera, *si los elementos de una fila (o una columna) se multiplican por un factor m, el determinante queda multiplicado por m.* Así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & mb_2 & mc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Un determinante se anula si los elementos de dos filas o dos columnas son proporcionales. Supongamos, por ejemplo, que en un determinante de cuarto orden

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

los elementos de la primera y tercera columna son proporcionales, es decir que:

$$c_1 = ma_1 \ ; \ c_2 = ma_2 \ ; \ c_3 = ma_3 \ ; \ c_4 = ma_4$$

Entonces:

$$D = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & a_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

puesto que el determinante del segundo miembro tiene dos columnas idénticas.

La segunda de las propiedades de las funciones lineales homogéneas antes enunciadas, implica la siguiente proposición: *Si en un determinante D los elementos de una fila son sumas*

$$b_{i1} + c_{i1} \ , \ b_{i2} + c_{i2}, \ldots, b_{in} + c_{in} \ ,$$

entonces el determinante será la suma de dos determinantes D' y D'' en los que las filas correspondientes son, respectivamente, $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}$ y $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}$, siendo las otras filas las mismas de D. La misma propiedad es válida para las columnas. Así:

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Una consecuencia particularmente importante de esta proposición es la siguiente: *Un determinante D no cambia, si a cada elemento de una fila (o columna) se suma el elemento correspondiente de otra fila (o columna) multiplicado por el mismo factor.* En realidad, el nuevo determinante D' es igual a D más otro determinante que es igual a cero, puesto que los elementos de dos filas (o columnas) son proporcionales. Así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + mc_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + mc_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + mc_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

9. **Ejemplos.** — Las propiedades recién enunciadas pueden usarse para transformar los determinantes, y a veces facilitan su resolución. Los siguientes ejemplos mostrarán cómo pueden hacerse tales transformaciones.

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Restando la primera fila de la segunda (lo que significa que se suman a los elementos de la segunda fila los de la primera multiplicados por —1) y luego restando los de la primera fila de los de la tercera, obtenemos el determinante:

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

que tiene el mismo valor de D. Pero en D' los elementos de la tercera y de la segunda filas son proporcionales; por lo tanto $D' = 0$ y también $D = 0$.

Ejemplo 2. Consideremos el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Sumando la segunda columna a la primera y luego a la tercera y a la cuarta, tenemos otro determinante igual a D:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Súmese la primera fila de este determinante a la segunda, tercera y cuarta. Esto da:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Réstese ahora la tercera fila de la primera y la cuarta de la segunda:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

e intercambiando la primera y la segunda columnas:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

Discutiremos aún más este determinante en el Párrafo 11.

Ejemplo 3. Consideremos el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}.$$

Sumando la segunda y la tercera columna a la última, lo que no cambia el valor del determinante, tenemos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Ejemplo 4. Sea

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Multiplicando la primera, segunda y tercera filas por a, b y c, respectivamente, el determinante resultará multiplicado por abc; es decir,

$$abcD = \begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

donde

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

e intercambiando columnas

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

La última operación consiste en cambiar filas por columnas, lo cual no altera el valor del determinante.

Ejemplo 5. Sea

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Réstese la segunda fila de la primera, luego la tercera de la segunda y sáquese factor común $a - b$ y $b - c$. Entonces:

$$D = (a - b)\,(b - c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a + b \\ 0 & 1 & b + c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Réstese ahora la segunda fila de la primera y sáquese el factor $a - c$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a + b \\ 0 & 1 & a + c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b + c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

y

$$D = (a - b)\,(a - c)\,(b - c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b + c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Considerando a, b, c como variables, el determinante D es de segundo grado con respecto a cada una de ellas; pero también es de segundo grado el producto

$$(a - b)\,(a - c)\,(b - c)\,.$$

En consecuencia:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b + c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

no contiene ahora b ni c, y su valor puede hallarse atribuyendo a b y c valores especiales, por ejemplo: $b = c = 0$. Así:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

y finalmente:

$$D = -(a-b)(a-c)(b-c) = (a-b)(a-c)(c-b).$$

Problemas

Hallar el valor de los determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+2b & 3b+2c & 3c+2a \\ b & c & a \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_2y_1 & 1+x_3y_1 & 1+x_4y_1 \\ 1+x_1y_2 & 1+x_2y_2 & 1+x_3y_2 & 1+x_4y_2 \\ 1+x_1y_3 & 1+x_2y_3 & 1+x_3y_3 & 1+x_4y_3 \\ 1+x_1y_4 & 1+x_2y_4 & 1+x_3y_4 & 1+x_4y_4 \end{vmatrix}.$

6. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & k \\ -c & -f & -h & 0 & l \\ -d & -g & -k & -l & 0 \end{vmatrix}.$

Demostrar que:

7. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

8. $\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a+c & a+b & b+c \\ b+c & b+a & a+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}.$

9. $$\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & x^2 \\ 1 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = x^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. $$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 \\ a^2 & 0 & c^2 \\ b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

11. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

12. $$\begin{vmatrix} x^4 & x^9 & x^{16} \\ x^9 & x^{16} & x^{25} \\ x^{16} & x^{25} & x^{36} \end{vmatrix} = x^{36} \begin{vmatrix} 1 & x & x^4 \\ x & x^4 & x^9 \\ x^4 & x^9 & x^{16} \end{vmatrix}.$$

10. **Desarrollo por filas y columnas. Menores y cofactores.** — El determinante, como función lineal homogénea de elementos de una fila cualquiera, por ejemplo la i-ésima, puede desarrollarse así por los elementos de esa fila:

$$D = A_{i1} a_{i1} + \ldots + A_{ij} a_{ij} + \ldots + A_{in} a_{in},$$

donde los coeficientes A_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ no contienen a $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. El coeficiente A_{ij} de a_{ij} en este desarrollo se llama *complemento o cofactor* del elemento a_{ij}. Este complemento está relacionado al determinante de orden $n - 1$ obtenido de D, suprimiendo su i-ésima columna, sin cambiar el orden de las otras filas y columnas. Este determinante D_{ij} de orden $n - 1$ se llama *menor* correspondiente al elemento a_{ij}. Por ejemplo, los menores que corresponden a los elementos a_1, b_1 y c_1 en el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

son:

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

El complemento A_{ij} y el menor D_{ij} están relacionados íntimamente entre sí; vamos a probar que:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

es decir que:

$$A_{ij} = D_{ij},$$

si la fila y la columna ocupadas por a_{ij} tienen la misma paridad, y

$$A_{ij} = -D_{ij},$$

en caso contrario. Probaremos primero esta importante relación para el primer elemento de la izquierda a_{11}. En el desarrollo.

$$D = A_{11}a_{11} + A_{12}a_{12} + \ldots + A_{1n}a_{1n},$$

el complemento A_{11} no depende de $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$, y, en consecuencia, no cambia al tomar valores particulares:

$$a_{11} = 1 \ ; \ a_{12} = a_{13} = \ldots = a_{1n} = 0 .$$

Por lo tanto:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Cuando en este determinante, de la segunda, tercera, ... n-ésima fila se resta la primera multiplicada por $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ respectivamente, el complemento A_{11} se representa por el determinante

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

que depende sólo de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Evidentemente, A_{11} es una función racional entera de los elementos de B, es lineal y homogénea con respecto a los elementos de cada fila de B y se anula cuando dos de estas filas son idénticas, tomando el valor 1 en caso de que sea

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix} .$$

Por estas propiedades A_{11} queda indentificado como el determinante de la matriz B, es decir:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = D_{11}$$

Para establecer la relación entre el complemento A_{ij} y el menor D_{ij} de un elemento arbitrario a_{ij}, la columna a la que pertenece este elemento se transpone j veces con las columnas vecinas hasta que ocupe el lugar de la primera y luego se transpone la i-ésima fila i veces con las filas adyacentes hasta que ocupe el lugar de la primera. Luego de estas $i + j$ transposiciones de filas y columnas, en el nuevo determinante D' el elemento a_{ij} se encuentra en la esquina superior izquierda y su complemento en D', como puede verse fácilmente, es D_{ij}; pero

$$D = D' (-1)^{i+j},$$

en consecuencia, el complemento de a_{ij} en D es:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} .$$

Un determinante también puede ser desarrollado por los elementos de una columna. El desarrollo por los elementos de la j-ésima columna es:

$$D = A_{1j} a_{1j} + A_{2j} a_{2j} + \dots + A_{nj} a_{nj} .$$

Adviértase la siguiente propiedad importante de los complementos: Cuando en un desarrollo

$$D = A_{i1} a_{i1} + A_{i2} a_{i2} + \dots + A_{in} a_{in} ,$$

los elementos de la i-ésima fila son reemplazados por los elementos de otra fila $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ $(k \neq i)$, la suma

$$A_{i1} a_{k1} + A_{i2} a_{k2} + \dots + A_{in} a_{kn} ,$$

es el desarrollo de un determinante en el que la i-ésima y la k-ésima filas son las mismas; por lo tanto:

$$A_{i1} a_{k1} + A_{i2} a_{k2} + \dots + A_{in} a_{kn} = 0 ,$$

siendo k e i diferentes. En la misma forma:

$$A_{1j} a_{1k} + A_{2j} a_{2k} + \dots + A_{nj} a_{nk} = 0 ,$$

si k y j no son iguales.

11. **Ejemplos.** — El desarrollo de un determinante por filas o columnas junto con las transformaciones que deben efectuarse sobre él,

proveen un método práctico para calcular determinantes. Los siguientes ejemplos mostrarán cómo hacerlo.

Ejemplo 1. En el Ejemplo 2 del Párrafo 9 se demostró que

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el último determinante por los elementos de la primera fila, que son todos ceros menos el primero, vemos que el desarrollo se reduce a un solo término, de modo que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

Siendo en este determinante, el complemento de -1:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 21 = -5$$

se ve de inmediato que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 5$$

y, en consecuencia:

$$D = -5.$$

Ejemplo 2. Calcular:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Réstese la segunda columna multiplicada por 2 de la primera y la cuarta. Esto da:

$$D = \begin{vmatrix} -11 & 7 & 1 & -12 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & -8 & 2 \\ -6 & 3 & 0 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarróllese por los elementos de la quinta fila, teniendo en cuenta que el complemento de 1 en esta fila es:

$$-\begin{vmatrix} -11 & 1 & -12 & 5 \\ -2 & 3 & -8 & 2 \\ -6 & 0 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -D'.$$

Esto da:

$$D = -D',$$

de modo que todo se reduce al cálculo de un determinante de cuarto orden. Para simplificar D' súmese a las columnas 1 y 3, la columna 4 multiplicada por 2; entonces:

$$D' = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 7 & 6 & 11 & 3 \end{vmatrix}$$

Ahora súmese la columna 1 a la columna 4 y luego a la columna 1 la 3 multiplicada por -2; esto da:

$$D' = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 10 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -15 & 6 & 11 & 10 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los elementos de la fila 3, tenemos:

$$D' = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 10 & 3 & 4 \\ -15 & 6 & 10 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 2 \\ -15 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ahora:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 2 \\ -15 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -15 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & -55 \end{vmatrix},$$

y, desarrollando por los elementos de la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & -55 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 6 & -55 \end{vmatrix} = 55 + 84 = 139.$$

Por lo tanto: $D' = -278$ y $D = 278$.

Ejemplo 3. Para calcular el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

réstese la segunda columna de la primera y desarróllese por los elementos de la primera columna; esto da

$$D = a \begin{vmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

El primer determinante del segundo miembro es similar al propuesto; podemos escribir:

$$D' = \begin{vmatrix} 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}.$$

El otro determinante, luego de restar la primera columna de la segunda y la tercera, se convierte en:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 1 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = cd.$$

Por lo tanto:

$$D = aD' + bcd.$$

Aplicando las mismas transformaciones a D', hallamos:

$$D' = bD'' + cd,$$

donde:

$$D'' = \begin{vmatrix} 1+c & 1 \\ 1 & 1+d \end{vmatrix} = cd + c + d.$$

Por lo tanto:

$$D' = bcd + bc + bd + cd,$$

y

$$D = abcd + abc + abd + acd + bcd =$$

$$= abcd\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Ejemplo 4. El siguiente determinante de orden n

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

aparece a menudo y se llama determinante de Vandermonde. La manera más simple de calcularlo es reemplazar x_n por una variable x. Entonces el determinante se transforma en un polinomio $D_n(x)$ de grado $n-1$ en x, como puede verse desarrollándolo por los elementos de la última fila. Para $x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ este polinomio se anula puesto que $D(x_\alpha)$ para $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ es un determinante con dos filas iguales, por lo tanto:

$$D_n(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}),$$

donde C es el coeficiente del término de mayor grado en $D_n(x)$. Este coeficiente es el menor

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n-1} & x^2_{n-1} & \ldots & x_{n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

correspondiente al elemento x_n^{n-1} y de esta manera tenemos:

$$D_n(x_n) = D_n = D_{n-1}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1}). \qquad [1]$$

El determinante D_{n-1} es del mismo tipo de D_n y puede ser tratado de la misma manera. Será:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1,$$

por lo tanto, se desprende de (1) para $n = 3$:

$$D_3 = (x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1).$$

Además:

$$D_4 = (x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1),$$

etc. La expresión general del determinante de Vandermonde es:

$$\begin{aligned} D_n = {} & (x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_1) \\ & (x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (x_3-x_2)(x_3-x_1) \\ & (x_2-x_1) \end{aligned}$$

Es una función racional entera de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que cambia su signo cuando dos de las variables se trasponen y por esta razón es llamada función alternante. Esto se debe a que el intercambio de dos variables, por ejemplo x_1 y x_2, corresponde al intercambio de la primera y segunda filas, y esto causa el cambio de signo del determinante de Vandermonde.

Problemas

Calcular los determinantes numéricos:

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & -5 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 10 & -4 & -3 \\ -5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix}$.

Calcular los determinantes literales:

10. $\begin{vmatrix} 2a & a+b & a+c \\ b+a & 2b & b+c \\ c+a & c+b & 2c \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a+c & a+b & b+c \\ b+c & b+a & a+c \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$. **13.** $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$. **16.** $\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ac+bd & a^2c^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ Cuando se considera c como variable, el determinante es de tercer grado en c, anulándose para $c = a$, $c = b$, y faltándole el término en c^2.

18. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 1 & a & b^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$ El determinante tiene la forma $(c-a)(c-b)(Ac^2+Bc+C)$ donde A, B, C no dependen de c, faltando los términos en c^2 y c^3.

21. $\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ac \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$. **22.** $\begin{vmatrix} (x-a)^2 & (y-a)^2 & (z-a)^2 \\ (x-b)^2 & (y-b)^2 & (z-b)^2 \\ (x-c)^2 & (y-c)^2 & (z-c)^2 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}.$ **24.** $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$

25. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$ **26.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$ **27.** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \end{vmatrix}.$

28. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1 & 0 & x_3 \\ x_4 & x_4 & x_4 & 1 & x_4 \end{vmatrix}$ Generalizar. **29.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$ Generalizar.

30. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+e \end{vmatrix}$ Generalizar.

31. $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$ **32.** $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$

33. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ Generalizar. SUGESTIÓN: Reemplácese a por una variable x; entonces el determinante es de cuarto grado en x, tiene raíces b, c, d y le falta el término en x^3.

34. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^5 \\ 1 & b & b^2 & b^5 \\ 1 & c & c^2 & c^5 \\ 1 & d & d^2 & d^5 \end{vmatrix}$ Generalizar.

35. Si

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

demostrar que $D_n = a_n D_{n-1} + D_{n-2}$.

*** 36.** Si

$$(m, n) = \begin{vmatrix} x^{m^2} & x^{(m+1)^2} & \ldots & x^{(m+n-1)^2} \\ x^{(m+1)^2} & x^{(m+2)^2} & \ldots & x^{(m+n)^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(m+n-1)^2} & x^{(m+n)^2} & \ldots & x^{(m+2n-2)^2} \end{vmatrix},$$

demostrar que

$$(m, n) = x^{mn(m+2n-2)} (0, n).$$

*** 37.** Usando la notación del Problema * 36, demostrar que:

$$(0, n+1) = (1 - x^{-2})(1 - x^{-4}) \ldots (1 - x^{-2n}) (2, n)$$

*** 38.** Dedúzcase que:

$$(0, n+1) = x^{4n^2} (1 - x^{-2})(1 - x^{-4}) \ldots (1 - x^{-2n}) (0, n)$$

y que

$$(0, n) = x^{n(n-1)^2} (x^2 - 1)^{n-1} (x^4 - 1)^{n-2} (x^6 - 1)^{n-3} \ldots (x^{2n-2} - 1)^1.$$

MATRICES

★ 12. **Igualdad y adición de matrices.** — Hasta aquí el término matriz ha sido empleado sólo para designar una cuadrícula de n^2 elementos a_{ij}. Estas disposiciones de elementos pueden considerarse, sin embargo, como nuevas cantidades matemáticas luego que definamos la noción de igualdad de matrices y las dos operaciones directas llamadas comúnmente adición y multiplicación. De esta manera puede desarrollarse una extensa álgebra de las matrices, de la cual sólo daremos, en este libro, una breve introducción. Una matriz de n^2 elementos se llama matriz de orden n. Así, para $n = 2, 3, 4, \ldots$ podemos hablar de matrices de 2°, 3°, 4° orden, etc. Refiriéndonos únicamente a la consideración de matrices de igual orden, decimos que *dos matrices son iguales si los elementos correspondientes, es decir, los elementos que pertenecen a las mismas filas y columnas, son iguales.* Si dos matrices se indican con las letras A y B y sus elementos con a_{ij} y b_{ij}, la igualdad

$$A = B$$

sintetiza las n^2 igualdades:

$$a_{ij} = b_{ij},$$

donde i y j toman cualquier valor $1, 2, \ldots, n$. Así, son iguales las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

no son iguales.

Con dos matrices A y B (del mismo orden) de elementos a_{ij} y b_{ij} podemos realizar una operación llamada adición que se indica con el habitual signo $+$.

Sumar una matriz B a una matriz A significa formar una nueva matriz C cuyos elementos c_{ij} sean las sumas $a_{ij} + b_{ij}$ de los elementos correspondientes de A y B. Así, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

De la definición se deduce inmediatamente que las leyes asociativa y conmutativa son válidas para la adición de matrices, es decir:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + B = B + A,$$

con todas sus consecuencias. La matriz 0 cuyos elementos son todos ceros, es la única matriz para la cual

$$A + 0 = A,$$

para toda matriz A, y por lo tanto 0 puede llamarse matriz cero ★.

★ 13. **Multiplicación de matrices.** — La definición de multiplicación de matrices puede basarse en la noción de producto *escalar* de dos sucesiones ordenadas de números o *vectores*. Por producto escalar de dos vectores

$$R = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \; ; \; S = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

entendemos la siguiente cantidad:

$$R.S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n .$$

Sean ahora dos matrices A y B de orden n. El vector

$$R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),$$

está vinculado con la i-ésima fila de A, y en la misma forma el vector

$$C_j = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}),$$

está vinculado con la j-ésima columna de B. La matriz

$$C = \begin{pmatrix} R_1.C_1 & R_1.C_2 \ldots R_1.C_n \\ R_2.C_1 & R_2.C_2 \ldots R_2.C_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_n.C_1 & R_n.C_2 \ldots R_n.C_n \end{pmatrix}$$

por definición es el producto de la matriz A por la matriz B, y escri bimos:

$$AB = C.$$

En otras palabras

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots c_{nn} \end{pmatrix}$$

donde

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

es el producto escalar $R_i \,.\, C_j$. Por ejemplo, de acuerdo a esta definición:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

pero

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo muestra que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa, de modo que debemos distinguir entre BA y AB. Por el contrario, la propiedad asociativa de la multiplicación se conserva; es decir:

$$(AB)\,C = A\,(BC).$$

Esto puede verificarse calculando los elementos de las matrices del primero y segundo miembro de acuerdo con la definición de producto. Por verificación directa puede demostrarse también la validez de las dos leyes distributivas:

$$(A + B)\,C = AC + BC$$

y

$$C\,(A + B) = CA + CB.$$

La matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

en la que los elementos de la diagonal son 1 y los demás 0, tiene la propiedad que para cualquier matriz A

$$AE = EA = A\,,$$

y E es la única matriz que tiene esta propiedad. Porque si E' es una segunda matriz tal que

$$AE' = E'A = A\,,$$

para todas las matrices A, tomando en particular $A = E$, tendremos:

$$EE' = E\,.$$

Pero, por otra parte, tomando $A = E'$ en

$$EA = A\,,$$

tendremos:

$$EE' = E',$$

de modo que $E' = E$. La matriz E representa el papel de la unidad con respecto a la multiplicación de matrices, y por esta razón se la llama *matriz unitaria*. Es un caso particular de las llamadas *matrices escalares*,

$$(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \dots 0 \\ 0 & a \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots a \end{pmatrix}$$

en las que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a un mismo número a, siendo los demás elementos 0. Multiplicando una matriz cualquiera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

por (a), o (a) por A, en ambos casos la matriz resultante es la misma:

$$A\,(a) = (a)\,A = \begin{pmatrix} aa_{11} & aa_{12} \dots aa_{1n} \\ aa_{21} & aa_{22} \dots aa_{2n} \\ \dots & \dots \\ aa_{n1} & aa_{n2} \dots aa_{nn} \end{pmatrix}.$$

El producto de las dos matrices escalares (a) y (b) es una matriz escalar (ab) y, en la misma forma, $(a) + (b)$ es una matriz escalar $(a + b)$. Teniendo en cuenta ésto, las matrices escalares (a) se representan simplemente por a, y el símbolo

$$aA = Aa\,,$$

representa el producto de una matriz escalar (a) por otra matriz A. Una matriz en la que todos sus elementos, excepto los de la primera columna, son 0, se llama *matriz columna*. Por lo tanto, las matrices columna son del tipo:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \dots 0 \\ x_2 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ x_n & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

y pueden ser designadas convenientemente por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\,.$$

El producto de una matriz cualquiera A por una matriz columna $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es otra matriz columna $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ donde:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Estas relaciones son, por lo tanto, equivalentes a una sola ecuación matricial

$$A\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n). \bigstar$$

Problemas

Demostrar que las matrices siguientes satisfacen las ecuaciones que se indican:

1. $S = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $S^2 = S$.

2. $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $S^2 - 3S + 8E = 0$.

3. $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $S^2 - (a + d)S + (ad - bc)E = 0$.

4. $S = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $S^2 = S$.

5. $S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$; $S^2 = E$.

6. $S = \begin{pmatrix} -2 & -2-\omega & -3 \\ -1-2\omega & -1-\omega & -1-2\omega \\ -\omega & -\omega & 1-\omega \end{pmatrix}$; $\omega^2 + \omega + 1 = 0$; $S^3 = E$.

7. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

demostrar que $AB = E$. ¿Qué da BA?

8. Demostrar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2+2i & 1-2i & 2-i \\ 1-2i & 2i & -1+2i \\ -i & i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

★ 14. **Producto de determinantes.** — Con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

está asociado el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

que se llama determinante de A y puede ser designado con la notación det. A. Entre el determinante del producto de matrices y los determinantes de los factores existe una relación simple que se expone en el importante teorema que sigue, llamado teorema de la multiplicación de determinantes:

Teorema. *El determinante del producto de las matrices A y B, o det. (AB), es igual al producto de los determinantes de los factores, o sea:*

$$\text{det. } (AB) = \text{det. } A \text{. det. } B \text{.}$$

DEMOSTRACION: Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}$$

y

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots c_{nn} \end{pmatrix}$$

donde

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} .$$

Considerando los elementos a_{ij} como variables, el determinante de C será una función racional entera de las n variables a_{ij}, lineal y homogénea con respecto a los elementos de cada fila de A, y se anulará cuando dos de estas filas sean idénticas, puesto que en ese caso C tendrá dos filas idénticas. De la discusión del Párrafo 7 se deduce que el det. C difiere del det. A por un factor Γ independiente de los elementos a_{ij}, de modo que

$$\text{det. } C = \Gamma \text{ det. } A .$$

Para determinar Γ elegimos $A = E$, entonces será $C = B$, y puesto que det. $E = 1$ tendremos:

$$\Gamma = \text{det. } B .$$

y así

$$\text{det. } C = \text{det. } AB = \text{det. } A . \text{ det. } B .$$

En otras palabras, el producto de dos determinantes, uno con elementos a_{ij} y otro con elementos b_{ij}, puede expresarse como un determinante con elementos c_{ij} obtenidos combinándolos de acuerdo a la regla de multiplicación de matrices en las que las filas de la primera matriz se multiplican por las columnas de la segunda o, brevemente, por multiplicación de fila por columna. Puesto que un determinante no cambia si se reemplazan las filas por las columnas, podemos también hacer multiplicación de fila por fila, columna por fila o columna por columna, obteniendo por cualquiera de estos procedimientos un determinante igual al producto de los determinantes dados. Podemos elegir la forma de multiplicar que nos convenga.

Ejemplo 1. Multiplíquense los determinantes

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

siendo ω una raíz cúbica imaginaria de la unidad. Multiplicando fila por fila, tenemos:

$$dD = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c+a & c+a+b \\ a+b\omega+c\omega^2 & b+c\omega+a\omega^2 & c+a\omega+b\omega^2 \\ a+b\omega^2+c\omega & b+c\omega^2+a\omega & c+a\omega^2+b\omega \end{vmatrix}$$

Pero

$$b+c\omega+a\omega^2 = \omega^2(a+b\omega+c\omega^2) \; ; \; c+a\omega+b\omega^2 = \omega\,(a+b\omega+c\omega^2)$$

$$b+c\omega^2+a\omega = \omega\,(a+b\omega^2+c\omega) \; ; \; c+a\omega^2+b\omega = \omega^2(a+b\omega^2+c\omega)$$

y, en consecuencia:

$$dD = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

o sea

$$dD = -\,d\,(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega).$$

Siendo d un determinante de Vandermonde y, en consecuencia, distinto de cero, puede suprimirse y entonces:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega).$$

Este determinante se llama determinante cíclico debido a que su segunda y tercera filas se obtienen permutando cíclicamente los elementos de la primera. Por un método similar, los determinantes cíclicos de cualquier orden pueden ser presentados como productos.

Ejemplo 2. Sea, como siempre, A_{ij} el complemento de a_{ij} en el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y consideremos el *determinante adjunto*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cuando D se multiplica por Δ, fila por fila, el producto resulta un determinante

$$D\,\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

en el cual

$$c_{ij} = a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn}.$$

Pero, de acuerdo a las identidades establecidas en el párrafo 10:

$$c_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq i \quad \text{y} \quad c_{ii} = D.$$

Por lo tanto:

$$D\,\Delta = \begin{vmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{vmatrix} = D^n,$$

o sea:

$$D(\Delta - D^{n-1}) = 0.$$

Ahora, si los a_{ij} se consideran como variables, D y Δ son funciones racionales enteras de ellos, y D no se anula idénticamente. Desde que el producto

$$D(\Delta - D^{n-1}),$$

se anula idénticamente, el factor debe ser idénticamente nulo, de modo que

$$\Delta = D^{n-1},$$

o sea

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = D^{n-1}$$

idénticamente en los elementos a_{ij}. Naturalmente, esta igualdad se conserva verdadera para valores particulares de a_{ij}, aun para aquellos para los que $D = 0$. El razonamiento empleado se basa en el siguiente teorema: *Si el producto de dos polinomios F y ϕ en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ se anula idénticamente, por lo menos uno de los factores debe ser un polinomio idénticamente nulo.*

El teorema se cumple en el caso de polinomios en una variable, y basta probar que se cumple para polinomios en n variables suponiendo su validez para polinomios en $n-1$ variables. Si ni F ni ϕ se anulan idénticamente, podemos ordenarlos en potencias de una de las variables, por ejemplo x_1, y escribir:

$$F = F_0 x_1^n + F_1 x_1^{n-1} + \dots$$

$$\phi = \phi_0 x_1^m + \phi_1 x_1^{m-1} + \dots$$

donde $F_0, F_1, \ldots; \phi_0, \phi_1, \ldots$ son polinomios en las $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_n$, y ni F_0 ni ϕ_0 se anulan idénticamente. Pero

$$F \cdot \phi = F_0 \, \phi_0 \, x_1^{n+m} + \ldots = 0\,,$$

idénticamente, por hipótesis; por lo tanto, también se anula idénticamente en las variables $x_2, \ldots, x_n$; en consecuencia:

$$F_0 \, \phi_0 = 0\,.$$

Por hipótesis esto implica que F_0 o ϕ_0 se anulan idénticamente, y ésto es un absurdo ★.

Problemas

1. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a+b+\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}c & b+c+\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & c+a+\frac{1}{2}b \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix}$$

y escribir como producto el determinante del segundo miembro.

2. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\,a\,(b-a)\,(c-b)\,(d-c)$$

3. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 \end{vmatrix}^2 = 125$$

si ω es una raíz quinta imaginaria de la unidad.

4. Un determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

en el cual

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, c_{jk} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq i\,, \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{n} c^2_{ik} = 1\,,$$

se llama determinante ortogonal. Demostrar que $\Delta = \pm 1$.

★ 15. Matrices recíprocas.

— Una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *singular* o *no singular* según que su determinante sea o no cero. Sea A una matriz no singular y $D \neq 0$ su determinante. Designando, como lo hicimos anteriormente, al complemento del elemento a_{ij} en D por A_{ij} consideremos la matriz:

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{D} & \dfrac{A_{21}}{D} \dots \dfrac{A_{n1}}{D} \\ \dfrac{A_{12}}{D} & \dfrac{A_{22}}{D} \dots \dfrac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots \\ \dfrac{A_{1n}}{D} & \dfrac{A_{2n}}{D} \dots \dfrac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}$$

Los productos AX y XA son:

$$AX = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} \dots c_{nn} \end{pmatrix} \; ; \quad XA = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \dots c'_{1n} \\ c'_{12} & c'_{22} \dots c'_{2n} \\ \dots & \dots \\ c'_{n1} & c'_{n2} \dots c'_{nn} \end{pmatrix}$$

donde

$$c_{ij} = \frac{a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{1n} A_{jn}}{D}$$

$$c'_{ij} = \frac{A_{1i} a_{1j} + A_{2i} a_{2j} + \dots + A_{ni} a_{nj}}{D}\,.$$

Por las identidades del Párrafo 10:

$$c_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq i \quad \text{y} \quad c_{ii} = 1$$

$$c'_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq i \quad \text{y} \quad c'_{ii} = 1\,.$$

En consecuencia:

$$XA = AX = E\,.$$

Esta matriz X se llama *recíproca de A* y se indica por A^{-1}. La matriz A^{-1} es única, es decir, no hay otra matriz Y tal que:

$$YA = AY = E .$$

Si existiera tal matriz, multiplicando ambos miembros de la relación

$$YA = E$$

por A^{-1} tendríamos

$$(YA)\, A^{-1} = Y\,(AA^{-1}) = EA^{-1}.$$

Pero

$$AA^{-1} = E \;\; ; \; EA^{-1} = A^{-1} ,$$

y entonces

$$YE = Y = A^{-1} .$$

Por otra parte, multiplicando A^{-1} por $AY = E$, tendríamos

$$A^{-1}\,(AY) = (A^{-1}\,A)\; Y = A^{-1}\,E ,$$

pero

$$A^{-1}\,A = E \;\; ; \; A^{-1}\,E = A^{-1}$$

y

$$EY = Y = A^{-1} .$$

Por lo tanto, para cualquier matriz no singular A existe una única matriz recíproca:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \cdots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \cdots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \cdots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}$$

tal que

$$A^{-1}\,A = AA^{-1} = E .$$

El producto de varias matrices, por ejemplo cuatro: A, B, C, D, tomadas en ese orden, se define como:

$$ABCD = ((AB)\; C)\; D ,$$

y se deduce de la propiedad asociativa que, al multiplicar, los factores pueden combinarse en grupos arbitrarios si no se altera el orden de los factores,

$$ABCD = A\,(BCD) = (AB)\,(CD) .$$

Si todos los factores son matrices no singulares, su producto es una matriz no singular. En efecto, por el teorema de multiplicación de determinantes,

$$\text{det. } (ABCD) = \text{det. } A \text{. det } B \text{. det. } C \text{. det. } D \neq 0 \text{.}$$

La matriz recíproca del producto $ABCD$ es

$$D^{-1} C^{-1} B^{-1} A^{-1}$$

porque

$$\begin{aligned}(ABCD)\,(D^{-1} C^{-1} B^{-1} A^{-1}) &= ABC\,(DD^{-1})\,C^{-1} B^{-1} A^{-1} = \\ &= AB\,(CE)\,C^{-1} B^{-1} A^{-1} = AB\,(CC^{-1})\,B^{-1} A^{-1} = \\ &= A\,(BE)\,B^{-1} A^{-1} = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = (AE)\,A^{-1} = AA^{-1} = E\,.\end{aligned}$$

El producto de n matrices iguales

$$AA \ldots A\,,$$

es, por definición, la n-ésima potencia de A:

$$A^n\,,$$

cuyo exponente es un entero positivo n, y se deduce de la propiedad asociativa de la multiplicación que:

$$A^m A^n = A^{m+n}\,,$$

para dos enteros positivos cualesquiera m y n. El símbolo A^0 se define por:

$$A^0 = E\,,$$

y una potencia A^{-n}, con exponente entero negativo, es por definición:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n\,,$$

siendo A no singular. Con estas definiciones las propiedades de la potenciación

$$A^m A^n = A^{m+n} \quad ; \quad (A^m)^n = A^{mn}\,,$$

son válidas para exponentes enteros, pero los exponentes negativos sólo pueden ser admitidos si A es una matriz no singular.

Si A es una matriz no singular, la ecuación matricial

$$AX = B\,,$$

tiene una única solución

$$X = A^{-1} B\,.$$

Porque

$$A\,(A^{-1} B) = (AA^{-1})\,B = EB = B\,,$$

de modo que $A^{-1}B$ es una solución. Por otra parte, de la ecuación

$$AX = B,$$

se deduce que

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X = A^{-1}B.$$

de modo que la solución

$$X = A^{-1}B,$$

es única. La ecuación

$$XA = B.$$

tiene también una única solución

$$X = BA^{-1},$$

que puede ser verificada de la misma manera. Por supuesto, todo esto es válido sólo para matrices A no singulares. Si A es una matriz singular, ninguna de las ecuaciones

$$AX = B \; ; \; XA = B,$$

tiene solución, a menos que det. $B = 0$. Porque

$$\det. B = \det. A . \det. X = 0.$$

En particular, una matriz singular no tiene recíproca. ★

Problemas

1. Si se intercambian las filas y columnas en una matriz A, se obtiene otra matriz que se llama *conjugada* o *traspuesta de* A. Designando, en general, por A_0 la matriz conjugada de A, demostrar que

$$(AB)_0 = B_0 A_0$$

y, más generalmente, que:

$$(ABC \dots L)_0 = L_0 \dots C_0 B_0 A_0 .$$

2. Demostrar que $(A_0)^{-1} = (A^{-1})_0$ si A es no singular.

3. Una matriz cuyos elementos A_{ij} son los complementos de los elementos a_{ij} de una matriz A se llama *adjunta de* A. Designando la matriz adjunta por A^*, demostrar que

$$(AB)^* = A^* . B^*$$

4. Las relaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{aligned}$$

definen una transformación lineal de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en las variables $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n$. Una transformación lineal se caracteriza por la matriz $A = (a_{ij})$ de sus coeficientes. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se transforman en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ por una transformación lineal con la matriz B, demostrar que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se transforman en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ por transformación lineal con la matriz AB. Si A es no singular, demostrar también que $y_1, y_2, \ldots,$ $\ldots, y_{n_1}$ se transforman en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por la transformación lineal cuya matriz es A.

5. Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se transforman en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ por una transformación lineal con la matriz A. Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se transforman, respectivamente, en $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ e $y_1', y_2', \ldots y_n'$ por la misma transformación no singular cuya matriz es T. Demostrar que la transformación de $x_1', x_2' \ldots, x_n'$ en $y_1', y_2', \ldots$ $\ldots, y_n'$ tiene por matriz

$$T^{-1} AT .$$

Las matrices de este tipo se llaman *semejantes* a A.

CAPITULO X

RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES POR DETERMINANTES. ALGUNAS APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES A LA GEOMETRIA

1. **Regla de Cramer.** — Los determinantes tienen muchas aplicaciones. Una de las más importantes es la aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas, para lo cual fueron introducidos por Leibnitz y Cramer, aun cuando sin la conveniente escritura simbólica que es de origen posterior. Sea

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_{21} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \qquad [1]$$

un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Con los coeficientes del sistema formamos el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

llamado determinante del sistema [1]. Al multiplicar las ecuaciones [1], respectivamente, por los complementos de los elementos de la primera columna y sumarlas, en la ecuación resultante se eliminarán todas las incógnitas excepto x_1. En efecto, el coeficiente de x_i para $i > 1$ será:

$$A_{11}a_{1i} + A_{12}a_{2i} + \ldots + A_{n1}a_{ni} = 0$$

y el de x_1

$$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \ldots + A_{n1}a_{n1} = D\,.$$

Así:

$$Dx_1 = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \qquad [2\,a]$$

y similarmente

$$Dx_i = A_{1i}b_i + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n\,, \qquad [2\,b]$$

para $i > 1$. Las ecuaciones [2] son consecuencias necesarias de las [1]; y en el caso en que $D \neq 0$ la recíproca es también cierta, es decir, las ecuaciones [1] se deducen de las [2]. Para demostrarlo, multipliquemos las ecuaciones [2], respectivamente, por $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ y súmense los resultados. Observando que

$$A_{11} a_{11} + A_{12} a_{12} + \ldots + A_{1n} a_{1n} = D,$$

mientras que

$$A_{i1} a_{11} + A_{i2} a_{12} + \ldots + A_{in} a_{1n} = 0,$$

para $i > 1$, se deduce que

$$D (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n) = D b_1,$$

de donde, simplificando $D \neq 0$,

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1,$$

y puede demostrarse similarmente que

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = b_i,$$

para $i > 1$. Luego, en el caso en que $D \neq 0$, los sistemas [1] y [2] son equivalentes. La solución de este último es inmediata y lleva a la expresión de x_i, de la forma

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

donde

$$D_i = A_{1i} b_i + A_{2i} b_i + \ldots + A_{ni} b_n,$$

es el desarrollo por los elementos de la i-ésima columna del determi, nante que resulta del D reemplazando su i-ésima columna por $b_1, b_2, \ldots$-$\ldots, b_n$, segundos miembros de las ecuaciones [1]. Así llegamos a la siguiente regla para resolver los sistemas de ecuaciones lineales:

Regla de Cramer. Si el determinante D de un sistema de ecuaciones lineales es distinto de cero, el sistema tiene una solución y esta solución es única. Los valores de las incógnitas aparecen como cocientes de los determinantes.

$$x_i = \frac{D_i}{D}; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

donde D_i resulta de reemplazar la i-ésima columna de D por $b_1, b_2, b_3, \ldots$ $\ldots, b_n$.

Ejemplo. Resolver por determinantes el sistema

$$\begin{aligned} 5x + \quad 4z + 2t &= 3 \\ x - y + 2z + \ t &= 1 \\ 4x + y + 2z \quad &= 1 \\ x + y + \ z + \ t &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema es:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Además

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

y similarmente

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

Luego, finalmente

$$x = 1 \quad ; \quad y = -1 \quad ; \quad z = -1 \quad ; \quad t = 1.$$

Problemas

Resolver por determinantes

1. $2x - z = 1$
$2x + 4y - z = 1$
$x - 8y - 3z = -2$

2. $x + y + z = a$
$x + (1 + a)y + z = 2a$
$x + y + (1 + a)z = 0$

3. $5x + 4z + 2t = 3$
$x - y + 2z + t = 1$
$4x + y + 2z = 1$
$x + y + z + t = 0$

4. $3x + 2y - z = 5$
$x - y - t = 0$
$3x - 2y - z - t = 4$
$y - t = 1$

5. $x + 2y + z + t = -1$
$2x + y + z + 2t = 0$
$x + 2y + 2z + t = 0$
$x + y + z + 2t = 2$

6. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = b$
$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = c$
$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = d$

7. $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$

8. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2$
$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

9. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$
$x_2 + x_3 - x_4 = 1$
$x_3 + x_4 - x_5 = 1$
$x_5 + x_4 - x_3 = 1$
$x_4 + x_3 - x_2 = 1$

10. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_3 + x_4 + x_5 = 1$
$-x_5 + x_4 + x_3 = 1$
$-x_4 + x_3 + x_2 = 2$

2 **Ecuaciones lineales homogéneas.** — Cuando el determinante de un sistema de ecuaciones lineales es cero, el sistema puede ser incompatible —o imposible de satisfacer para cualquier valor de sus incógnitas— o indeterminado, es decir, que admite infinitas soluciones. Antes de discutir este tema en forma general, examinaremos el caso de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas:

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\
f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 .
\end{aligned}$$

Este sistema, cuando su determinante es distinto de cero, tiene solamente la solución trivial

$$x_1 = 0 \;;\; x_2 = 0 \;;\; \dots \;;\; x_n = 0 ,$$

como se deduce de la regla de Cramer. Pero si el determinante es nulo, vamos a demostrar que, además de la solución trivial, es posible satisfacer el sistema con valores de las incógnitas que no son cero simultáneamente. La demostración se hará por inducción. En primer lugar, el enunciado es cierto para dos ecuaciones

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \;\;;\;\; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 ,$$

pues si todos los coeficientes fueran cero, el sistema se satisfaría para valores arbitrarios de x_1, x_2. En caso contrario, sea, por ejemplo, $a_{11} \neq 0$. Entonces:

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 ,$$

y sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación, ésta se convierte en:

$$\frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{a_{11}} x_2 = 0 ,$$

o sea

$$0 . x_2 = 0 ,$$

suponiendo

$$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = 0 .$$

Luego, x_2 puede ser elegida arbitrariamente; por ejemplo, sea $x_2 = -a_{11} \neq 0$ y entonces ambas ecuaciones se satisfarán si $x_1 = a_{12}$. Para completar ahora la demostración por inducción es suficiente demostrar que un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas tiene soluciones no triviales si su determinante es cero, supuesto que esta propiedad se cumple para $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas. No hay nada que demostrar si los coeficientes a_{ij} son cero. En caso contrario, mediante un cambio conveniente en la notación de las incógnitas y en el orden de las ecuaciones, podemos suponer que $a_{11} \neq 0$. El sistema

$$f_1 = 0 \;;\; f_2 = 0 \;;\; \ldots \;; f_n = 0 , \qquad [1]$$

es equivalente al sistema

$$f_1 = 0 \quad ; \quad f_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} f_1 = 0 \;;\; \ldots \;;\; f_n - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} f_1 = 0 , \qquad [2]$$

cuyo determinante es igual a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

En efecto, el determinante del sistema [2] se obtiene de D multiplicando su primera fila respectivamente por $\frac{a_{21}}{a_{11}}$; $\frac{a_{31}}{a_{11}}$; ... ; $\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ y restándola de la segunda, tercera, ..., n-ésima filas; por estas operaciones el valor del determinante no altera. Desarrollando el determinante así obtenido por los elementos de la primera columna, tenemos:

$$D = a_{11}\, \Delta ,$$

donde Δ es el determinante del sistema de ecuaciones

$$f_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} f_1 = 0 \; ; \; \ldots \; ; f_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} f_1 = 0 \, , \qquad [3]$$

que no contiene x_1. Desde que, por hipótesis, $D = 0$ y $a_{11} \neq 0$, el determinante del sistema [3] de las $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas $x_2, \ldots, x_n$ es cero. En consecuencia, suponiendo válido el teorema para $n - 1$ ecuaciones, es posible satisfacer [3] con valores x_2, no todos iguales a cero. Determinando entonces x_1 de la ecuación

$$f_1 = 0 \, ,$$

el sistema [2] y el sistema equivalente [1] se satisfacen, de manera que no todas las incógnitas son cero.

Así hemos demostrado el siguiente teorema que, a pesar de su simplicidad, está entre las herramientas más útiles y frecuentemente aplicadas en las investigaciones matemáticas:

Teorema. *Un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas, tiene soluciones no triviales sólo si su determinante es cero.*

Como corolario se sigue que *un sistema homogéneo en el que el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas tiene siempre una solución no trivial.* En efecto, es posible completar el sistema añadiendo un número de ecuaciones de la forma

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0 \, ,$$

que no restringen de manera alguna a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de manera de igualar el número de ecuaciones con el de incógnitas. Pero un sistema tal tiene su determinante nulo.

★ 3. Rango de una matriz. Independencia lineal. — Sea

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1n}\, x_n \\ f_2 &= a_{21}\, x_1 + \ldots + a_{2n}\, x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m &= a_{m1}\, x_1 + \ldots + a_{mn}\, x_n \end{aligned}$$

un sistema de funciones lineales homogéneas o formas de n variables. Con estas formas asociamos la matriz de los coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

que consta de n filas (número de las formas) y n columnas (número de las variables). Eligiendo en esta matriz r filas y r columnas ($r \leqq m$; $r \leqq n$) podemos formar con estos r^2 elementos un determinante de orden r. Hay varios determinantes de orden r que pueden formarse de esta manera y se llaman *menores* de orden r de la matriz A. En el caso $r = 1$, los elementos de la matriz se consideran como determinantes de orden 1. Por ejemplo, con los elementos de la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

podemos formar: (*a*) 20 menores de 3er. orden; (*b*) $15 \times 3 = 45$ menores de 2° orden; (*c*) $6 \times 3 = 18$ menores de 1er. orden. Correspondientes a la matriz

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

hay: (*a*) 4 menores de 3er. orden; (*b*) $6 \times 3 = 18$ menores de 2° orden; (*c*) $4 \times 3 = 12$ menores de 1er. orden. Por definición, una matriz es de rango ρ si contiene menores de orden ρ distintos de cero, mientras que todos los menores de orden $\rho + 1$ (si los hay) son nulos. El hecho de que todos los menores de orden $\rho + 1$ sean iguales a cero implica que los menores de orden $> \rho + 1$, si los hay, lo sean también. Por ejemplo, la matriz X es de rango 3, por contener el menor de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -14$$

que es distinto de cero, mientras que no existen menores de 4° orden. La matriz Y es de rango 2 ya que contiene el menor de 2° orden

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

distinto de cero, en tanto que los cuatro menores de 3er. orden son iguales a cero. Las formas lineales $f_1, f_2, \ldots, f_m$ correspondientes a la matriz A se dicen *linealmente independientes* si la relación idéntica:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0,$$

no puede ser satisfecha por la elección conveniente de las constantes

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, salvo para $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. De lo contrario, si pueden hallarse constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ no todas nulas, de modo que sea idénticamente en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0,$$

entonces las formas $f_1, f_2, \ldots, f_m$ se dicen linealmente dependientes. Sea σ el máximo número de formas linealmente independientes entre las $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Entre este número σ y el rango ρ de la matriz correspondiente a las formas $f_1, f_2, \ldots, f_m$, existe una relación simple expresada por el siguiente teorema:

TEOREMA. *Si la matriz correspondiente a las formas $f_1, f_2, \ldots, f_m$ es de rango ρ, entonces entre estas formas hay ρ linealmente independientes y cualesquiera $\rho + 1$ formas del sistema $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son linealmente dependientes, es decir que $\sigma = \rho$.*

DEMOSTRACION. Por un cambio eventual en la notación de las variables y en la numeración de las formas, podemos suponer que el menor de orden ρ, diferente de cero, es

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\rho} \\ \ldots & \ldots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \ldots a_{\rho\rho} \end{vmatrix}.$$

Entonces, las formas $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$ son linealmente independientes. En efecto, tratemos de hallar constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que sea idénticamente.

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_\rho f_\rho = 0.$$

En esta ecuación, iguálense los coeficientes de $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ a cero, obteniendo el sistema de ecuaciones homogéneas

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_\rho a_{\rho 1} &= 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_\rho a_{\rho 2} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_1 a_{1\rho} + \lambda_2 a_{2\rho} + \ldots + \lambda_\rho a_{\rho\rho} &= 0 \end{aligned}$$

cuyo determinante D' difiere del D solamente en que las filas de D' son columnas de D y viceversa. Luego $D' \neq 0$ y por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\rho = 0$, lo que demuestra que las ρ formas $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$ son independientes. Ahora sea $k > \rho$; deseamos demostrar que las formas

$f_1, f_2, \ldots, f_\rho$ y f_k son linealmente dependientes. Con este fin, consideremos el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\rho} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\rho} & f_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \ldots a_{\rho\rho} & f_\rho \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{k\rho} & f_k \end{vmatrix}.$$

Reemplazando en la última columna $f_1, f_2, \ldots, f_k$ por sus expresiones en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, el determinante Δ se desdobla en la suma de determinantes del tipo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\rho} & a_{1\sigma} & x_\sigma \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\rho} & a_{2\sigma} & x_\sigma \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \ldots a_{\rho\rho} & a_{\rho\sigma} & x_\sigma \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{k\rho} & a_{k\sigma} & x_\sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\rho} & a_{1\sigma} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\rho} & a_{2\sigma} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \ldots a_{\rho\rho} & a_{\rho\sigma} \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{k\rho} & a_k \end{vmatrix} x_\sigma$$

ρ de los cuales, correspondientes a $\sigma \leqq \rho$, son iguales a cero por tener dos columnas idénticas; los restantes $n - \rho$ son iguales a cero por ser proporcionales a los menores de orden $\rho + 1$ de la matriz A. Luego es, idénticamente en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\rho} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\rho} & f_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \ldots a_{\rho\rho} & f_\rho \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{k\rho} & f_k \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los elementos de la última columna, tenemos la identidad de la forma

$$Df_k + D_1 f_1 + D_2 f_2 + \ldots + D_\rho f_\rho = 0,$$

en la que $D \neq 0$. Luego, las formas $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$, f_k son linealmente dependientes y f_k, para $k > \rho$, puede ser expresada como sigue por medio de $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$

$$f_k = l_1 f_1 + l_2 f_2 + \ldots + l_\rho f_\rho.$$

Tómense ahora $\rho + 1$ formas cualesquiera

$$f_\alpha\ , f_\beta, \ldots, f_\lambda$$

y expréseselas por medio de $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$:

$$\begin{aligned} f_\alpha &= A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots + A_\rho f_\rho \\ f_\beta &= B_1 f_1 + B_2 f_2 + \ldots + B_\rho f_\rho \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_\lambda &= L_1 f_1 + L_2 f_2 + \ldots + L_\rho f_\rho \end{aligned}$$

Elíjanse los números $a, b, \ldots, l$, no todos iguales a cero, de manera de satisfacer las ρ ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1 a + B_1 b + \ldots + L_l l &= 0 \\ A_2 a + B_2 b + \ldots + L_2 l &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ A_\rho a + B_\rho b + \ldots + L_\rho l &= 0 \end{aligned}$$

con $\rho + 1$ incógnitas; entonces:

$$af_\alpha + bf_\beta + \ldots + lf_\lambda = 0$$

de manera que $\rho + 1$ formas cualesquiera son linealmente dependientes.

Corolario. *Cualesquiera $n + 1$ formas con n variables son linealmente independientes, puesto que la matriz correspondiente no tiene menores de orden superior a n y su rango es $\leqq n$.*

Ejemplo. Consideremos las formas lineales de tres variables x, y, z:

$$\begin{aligned} f_1 &= y \\ f_2 &= x + 2y + 3z \\ f_3 &= -x - y - 3z \\ f_4 &= x + 4y + 3z \end{aligned}$$

La matriz es la anteriormente llamada Y de rango 2. Luego, entre estas formas hay solamente dos que son linealmente independientes. Podemos tomar como tales a f_1 y f_2. Para expresar f_3 y f_4 en función de f_1 y f_2 considérense los determinantes

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & f_1 \\ 1 & 2 & f_2 \\ -1 & -1 & f_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & f_1 \\ 1 & 2 & f_2 \\ 1 & 4 & f_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando encontramos

$$-f_3 - f_2 + f_1 = 0 \quad ; \quad -f_4 + f_2 + 2f_1 = 0$$

de donde

$$f_3 = f_1 - f_2 \quad ; \quad f_4 = 2f_1 + f_2$$

★ 4. **Cómo determinar el rango de una matriz.** — Para encontrar el rango de una matriz se la reduce, por una serie de transformaciones que no lo afectan, a una cierta forma *normal* de la cual se puede encontrar el rango requerido por simple observación. Estas transformaciones son las siguientes:

1. Intercambio de dos filas.
2. Intercambio de dos columnas.

3. Suma de los elementos de una fila a los de otra, multiplicados por un factor arbitrario.

4. Suma de los elementos de una columna a los de otra, multiplicados por un factor arbitrario.

Para demostrar que estas operaciones dejan inalterado el rango de la matriz, introdúzcanse formas lineales correspondientes a la matriz:

$$f_1, f_2, \ldots, f_m. \qquad [1]$$

El número de formas independientes entre éstas es el rango de la matriz. Ahora, el intercambio de dos filas lleva a alterar el orden de dos de estas formas, lo que evidentemente no cambia el número de formas independientes en el sistema [1]. Para demostrar que la adición de los elementos de alguna columna multiplicados por un factor a los de otra no cambia el rango de la matriz, supóngase, por ejemplo, que los elementos de la segunda columna multiplicados por λ se suman a los elementos de la primera columna. La nueva matriz corresponde a las formas $f_1', f_2', f_3', \ldots, f_m'$, obtenidas de las $f_1, f_2, \ldots, f_m$ introduciendo nuevas variables $x_1', x_2', \ldots x_n'$ tales que

$$x_1 = x_1' + \lambda x_2' \quad ; \quad x_2 = x_2' \; ; \; \ldots \; ; \; x_n = x_n',$$

de donde, recíprocamente:

$$x_1' = x_1 - \lambda x_2 \quad ; \quad x_2' = x_2 \; ; \; \ldots \; ; \; x_n' = x_n.$$

Pero las formas que son independientes cuando se expresan por variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ serán evidentemente independientes cuando se lo hace por nuevas variables $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ y recíprocamente; luego, el número de formas independientes entre las $f_1', f_2', \ldots, f_m'$ es el mismo que entre $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Finalmente, para demostrar que la tercera operación no altera el rango, supóngase que a los elementos de la primera fila se les suman los elementos de la segunda multiplicados por λ. La nueva matriz corresponde a las formas

$$\phi_1 = f_1 + \lambda f_2 \quad ; \quad \phi_2 = f_2 \; ; \; \ldots \; ; \; \phi_m = f_m.$$

Luego, recíprocamente:

$$f_1 = \phi_1 - \lambda \phi_2 \quad ; \quad f_2 = \phi_2 \; ; \; \ldots \; ; f_m = \phi_m.$$

Ahora podemos aplicar el siguiente enunciado más amplio:

Si las formas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ pueden expresarse linealmente mediante $f_1, f_2, \ldots, f_m$ entre las cuales hay ρ independientes, el número ρ' de formas independientes entre las $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ no es mayor que ρ. Sean $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$, ρ formas independientes entre las $f_1, f_2, \ldots, f_m$ por medio de las cuales todas las otras formas de este sistema pueden ser expre-

sadás linealmente. Entonces, tomando cualesquiera $\sigma \geqq \rho + 1$ de entre las formas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ y llamándolas, por simplicidad, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\sigma$ podemos expresarlas mediante $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$, así:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= c_{11} f_1 + c_{12} f_2 + \ldots + c_{1\rho} f_\rho \\
\psi_2 &= c_{21} f_1 + c_{22} f_2 + \ldots + c_{2\rho} f_\rho \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_\sigma &= c_{\sigma 1} f_1 + c_{\sigma 2} f_2 + \ldots + c_{\sigma\rho} f_\rho .
\end{aligned}$$

Para ρ ecuaciones con σ incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$:

$$\begin{aligned}
c_{11}\lambda_1 + c_{21}\lambda_2 + \ldots + c_{\sigma 1}\lambda_\sigma &= 0 \\
c_{12}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \ldots + c_{\sigma 2}\lambda_\sigma &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
c_{1\rho}\lambda_1 + c_{2\rho}\lambda_2 + \ldots + c_{\sigma\rho}\lambda_\sigma &= 0
\end{aligned}$$

pueden ser satisfechas por valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$ no todos cero, desde que hay más incógnitas que ecuaciones. Pero entonces

$$\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \ldots + \lambda_\sigma \psi_\sigma = 0 ,$$

lo que demuestra que las formas $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\sigma$ son linealmente dependientes. Luego, se sigue que $\rho' \leqq \rho$.

Volviendo a las formas

$$\phi_1 = f_1 + \lambda f_2 \quad ; \quad \phi_2 = f_2 \; ; \; \ldots \; ; \; \phi_m = f_m ,$$

y llamando ρ' al mayor de los números de formas independientes entre ellas, concluímos que $\rho' \leqq \rho$. Desde que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ pueden expresarse mediante $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ tenemos, por la misma razón $\rho \leqq \rho'$ y luego $\rho' = \rho$, lo que demuestra que el rango de la matriz no se altera por la operación 3.

Para reducir una matriz a la forma normal, suponemos que contiene elementos distintos de cero. Entonces, por una cierta cantidad de intercambios de filas y columnas, un elemento que no es cero puede ser ubicado en la intersección de la primera fila y primera columna. Multiplicando ahora la primera columna por factores elegidos convenientemente y sumándola a las restantes columnas, podemos hacer iguales a cero todos los elementos de las columnas 2, 3, ... pertenecientes a la fila 1. Similarmente, podemos reducir a cero todos los elementos de la primera columna pertenecientes a la fila 2, 3, ... Ahora la matriz tiene en la primera fila y en las primeras columnas solamente un elemento distinto de cero. Si aparte de éste hay algunos otros elementos distintos de cero, llévese uno de ellos a la intersección de la segunda fila y segunda columna. Luego, mediante las operaciones 4 y 3 redúzcanse a

cero todos los elementos de la segunda fila y segunda columna excepto el elemento diagonal. Continuando de esta manera nos será posible reducir la matriz a la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ \cdot & & l & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \\ \cdot & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde todos los elementos no diagonales son ceros y en la diagonal los primeros ρ elementos son distintos de cero. El rango de una matriz de este tipo es evidentemente ρ y es el mismo que el rango de la matriz original. Debe notarse que en el caso de que los elementos de la matriz original sean enteros, la reducción puede hacerse sin introducir fracciones, como se verá en el ejemplo siguiente. Además, observando cuidadosamente los intercambios de filas, puede encontrarse cuáles de las ρ formas correspondientes a la matriz original son independientes.

Ejemplo. Encontrar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}.$$

Si la columna 1 se resta de las restantes, la matriz se reduce a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Luego, de las columnas 1; 3; 4; 5 réstese la columna 2 multiplicada por 2; 2; 3; 4 respectivamente; esto reduce la matriz precedente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Intercámbiense ahora las columnas 1 y 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y réstese la fila 1 de las 2; 3; 4; 5. Esto da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora réstese la fila 2 multiplicada por 2; 7; 12, de las filas 3; 4; 5, luego de lo cual la matriz aparece en la forma reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y su rango es 2. Este es el mismo, por lo tanto, que el rango de la matriz original. Desde que las filas no fueron intercambiadas, entre las formas

$$\begin{aligned} f_1 &= 2x + 3y + 4z + 5t + 6u \\ f_2 &= 3x + 4y + 5z + 6t + 7u \\ f_3 &= 4x + 5y + 6z + 7t + 8u \\ f_4 &= 9x + 10y + 11z + 12t + 13u \\ f_5 &= 14x + 15y + 16z + 17t + 18u \end{aligned}$$

las f_1 y f_2 son independientes y las restantes pueden expresarse mediante ellas. ★

Problemas

Hállese el rango de las matrices

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Hállese el número de formas independientes entre las siguientes y exprésense las restantes mediante ellas:

5. $f_1 = x + y - z$
   $f_2 = 3x - y + 4z$
   $f_3 = -3x + 5y - 11z$

6. $f_1 = 2x - y - z$
   $f_2 = -x + 2y - z$
   $f_3 = -x - y + 2z$

7. $f_1 = 2x + 3y - 2t$
   $f_2 = 3x + 4y - z - 3t$
   $f_3 = -y - 2z$
   $f_4 = -2x - 3y + 2t$

8. $f_1 = x + 7z + t$
   $f_2 = 3x + 2y + 15z + t$
   $f_3 = x + 2y + z - t$
   $f_4 = y - 3z - t$

★ 5. **Discusión general de los sistemas lineales.** — Podemos volver ahora a los sistemas de ecuaciones lineales y examinar su resolución de una forma más general. Sea el sistema a resolver, consistente de m ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{array}{l} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad [1]$$

Supóngase que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

correspondiente a las formas lineales $f_1, f_2, \dots, f_m$ sea ρ. Entonces, el número máximo de formas independientes entre éstas sería ρ. Podemos suponer que estas formas independientes son $f_1, f_2, \dots, f_\rho$. También, por un cambio en la notación de las incógnitas podemos suponer que

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho1} & a_{\rho2} & \dots & a_{\rho\rho} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Llamando σ a cualquiera de los números $\rho + 1$; $\rho + 2$; ... ; m, considérese el determinante

$$D_\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\rho} & f_1 - b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\rho} & f_2 - b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho1} & a_{\rho2} & \dots & a_{\rho\rho} & f_\rho - b_\rho \\ a_{\sigma1} & a_{\sigma2} & \dots & a_{\sigma\rho} & f_\sigma - b_\sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho1} & a_{\rho2} & \dots & f_\rho \\ a_{\sigma1} & a_{\sigma2} & \dots & f_\sigma \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\rho1} & a_{\rho2} & \dots & b_\rho \\ a_{\sigma1} & a_{\sigma2} & \dots & b_\sigma \end{vmatrix}$$

el primer determinante del segundo miembro se reduce idénticamente a cero como se demostró en el Párrafo 3; luego, para las variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ tenemos la identidad

$$D_\sigma = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_1 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_2 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \ldots a_{\rho\rho} & b_\rho \\ a_{\sigma 1} & a_{\sigma 2} \ldots a_{\sigma\rho} & b_\sigma \end{vmatrix}$$

Supóngase ahora que el sistema [1] es resoluble y que $x_1; x_2; \ldots ; x_n$ son números que lo satisfacen. Entonces: $f_1 - b_1 = 0$; $f_2 - b_2 = 0, \ldots$ $\ldots, f_m - b_m = 0$ y todos los determinantes $D_\sigma = 0$ para $\sigma = \rho + 1;$ $\ldots ; m$, lo que nos conduce a la conclusión de que el sistema [1] no tiene solución a menos que se cumpla la siguiente condición de compatibilidad:

$$\Delta_\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_1 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_2 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \ldots a_{\rho\rho} & b_\rho \\ a_{\sigma 1} & a_{\sigma 2} \ldots a_{\sigma\rho} & b_\sigma \end{vmatrix} = 0$$

para $\sigma = \rho + 1; \ldots ; m$. Recíprocamente, si estas condiciones se satisfacen, tenemos idénticamente

$$D_\sigma = 0,$$

para $\sigma = \rho + 1; \ldots ; m$. Pero desarrollando D_σ por los elementos de la última columna, tenemos

$$d\,(f_\sigma - b_\sigma) + d_1\,(f_1 - b_1) + \ldots + d_\rho\,(f_\rho - b_\rho) = 0,$$

idénticamente en $x_1; x_2; \ldots ; x_n$, de donde, desde que $d \neq 0$, se sigue que

$$f_\sigma - b_\sigma = c_{1\sigma}\,(f_1 - b_1) + c_{2\sigma}\,(f_2 - b_2) + \ldots + c_{\rho\sigma}\,(f_\rho - b_\rho),$$

para $\sigma = \rho + 1; \ldots ; m$, lo que demuestra que todas las ecuaciones [1] se satisfarán una vez que las primeras ρ de entre ellas

$$f_1 - b_1 = 0 \;;\; f_2 - b_2 = 0 \;;\; \ldots \;; f_\rho - b_\rho = 0, \qquad [2]$$

se satisfagan. Ahora, éstas se satisfacen en la forma más general atribuyendo a $x_{\rho+1}; \ldots ; x_n$ valores arbitrarios (supuesto $\rho < n$) y resolviendo [2] para $x_1; x_2; \ldots ; x_\rho$. por la regla de Cramer, lo que es posible desde que

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1\rho} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2\rho} \\ \ldots & \ldots \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} \ldots a_{\rho\rho} \end{vmatrix} \neq 0.$$

La conclusión a que nos ha conducido esta discusión es la siguiente:
Si la matriz de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es de rango ρ y las condiciones de compatibilidad

$$\Delta_\sigma = 0$$

para $\sigma = \rho + 1; \ldots; m$ no se satisfacen, el sistema no tiene solución o es incompatible. Por el contrario, si las condiciones de compatibilidad son satisfechas, el sistema es resoluble y $n - \rho$ incógnitas pueden tomar valores arbitrarios quedando entonces las restantes determinadas.

Este criterio puede expresarse en una forma elegante tomando en consideración, además de la matriz del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

la así llamada *matriz ampliada*

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Todos los menores de A se encuentran entre los de B, de manera que el rango de B no puede ser menor que el de A que hemos llamado ρ. Los únicos determinantes de orden $\rho + 1$ de la matriz ampliada que no figuran en A son los determinantes Δ_σ. Luego, si todos estos determinantes se anulan, y solamente en este caso, el rango de B es ρ. Es decir, la anulación de los determinantes Δ_σ es la condición necesaria y suficiente para la compatibilidad del sistema. Por lo tanto, *la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el rango de la matriz ampliada sea el mismo que el rango de la matriz del sistema.*

Ejemplo. Examinemos el sistema

$$\begin{aligned} f_1 &= 3x + 2y + 5z + 4t = 0 \\ f_2 &= 5x + 3y + 2z + t = 1 \\ f_3 &= 11x + 7y + 12z + 9t = k \\ f_4 &= 4x + 3y + 13z + 11t = l \end{aligned}$$

El rango de este sistema es 2 y las formas f_1 y f_2 son independientes. Aún más:

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

y las dos condiciones de compatibilidad son:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 7 & k \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & l \end{vmatrix} = 0,$$

de donde $k = 1$; $l = -1$. Por lo tanto, a menos que $k = 1$; $l = -1$, el sistema propuesto no tiene solución. En el caso de que $k = 1$; $l = -1$ tomamos las dos primeras ecuaciones y las escribimos en la forma

$$3x + 2y = -5z - 4t$$

$$5x + 3y = -2z - t + 1$$

y resolvemos para x e y. Esto da:

$$x = 11z + 10t + 2,$$

$$y = -19z - 17t - 3,$$

y con x e y así determinadas, todas las ecuaciones quedarán satisfechas, mientras z y t serán totalmente arbitrarias. ★

Problemas

Examínese la compatibilidad de los siguientes sistemas:

1. $2x - y - z = 1,$
$x - 2y + z = 1,$
$x + y - 2z = 1.$

2. $2x + 3y = 1,$
$3x + 4y + z = 0,$
$y - 2z = 3.$

3. $2x + y + 2z + t = 0,$
$x + 2y + z + 2t = 0,$
$x - y - z - t = 2,$
$x + y + z + t = l.$

4. $2x + 3y - 2t = k,$
$3x + 4y - z - 3t = l,$
$y + 2z = 1,$
$2x + 3y - 2t = 0.$

5. $x + y - z + t = 1,$
$x + 2y - z + 3t = 1,$
$x - z - t = 1,$
$x - y + z - 3t = 3.$

6. $x + y + z + t = 0,$
$2x + 3y - 2z + t = 1,$
$-y + 4z + t = 2,$
$x + 5z + 2t = -1.$

Aplicaciones geométricas de los determinantes

★ 6. **Ecuaciones de rectas, planos y círculos en forma de determinantes.** — Es fácil escribir en forma de determinante la ecuación de una recta determinada por dos puntos distintos o la de un plano dado por tres puntos no alineados. Sean $A_1(x_1; y_1)$ y $A_2(x_2; y_2)$ dos

puntos distintos dados por sus coordenadas con referencia a un sistema de ejes ortogonales. El determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad [1]$$

desarrollado, es una ecuación de primer grado en x e y si sus coeficientes

$$A = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$$

no son ambos iguales a cero. Luego, [1] representa la ecuación de una recta expresada en forma de determinante. Se satisface para $x = x_1$, $y = y_1$ y $x = x_2$, $y = y_2$ de manera que la recta determinada por [1] pasa por los puntos A_1 y A_2. Tres puntos $A_1\,(x_1; y_1)$, $A_2\,(x_2; y_2)$, $A_3\,(x_3; y_3)$ estarán por lo tanto alineados sólo si

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Supóngase ahora que $A_1\,(x_1; y_1; z_1)$, $A_2\,(x_2; y_2; z_2)$, $A_3\,(x_3; y_3; z_3)$ son tres puntos no alineados en el espacio, determinados por sus coordenadas referidas a un sistema de ejes ortogonales. La ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad [2]$$

es de primer grado en x, y, z y sus coeficientes:

$$A = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} ; \; B = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \; C = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

no son los tres iguales a cero, pues la anulación de los tres significa que las proyecciones de A_1, A_2, A_3 están alineados en los tres planos YOZ, ZOX, XOY lo que implica que A_1, A_2, A_3 sean colineares. En consecuencia, [2] representa un plano y este plano pasa por A_1, A_2, A_3 puesto que el determinante se anula para

$$\begin{array}{lll} x = x_1 ; & y = y_1 ; & z = z_1 . \\ x = y_2 ; & y = y_2 ; & z = z_2 . \\ x = x_3 ; & y = y_3 ; & z = z_3 . \end{array}$$

Igualmente fácil es escribir en forma de determinante la ecuación de un círculo que pasa por tres puntos no alineados $A_1(x_1; y_1)$; $A_2(x_2; y_2)$ $A_3(x_3; y_3)$.

La ecuación

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [3]$$

tiene la forma

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

con

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

distinto de cero. Luego [3] representa una circunferencia que pasa por A_1, A_2, A_3. Similarmente la ecuación

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [4]$$

representa una esfera que pasa por los cuatro puntos $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$ que no están en el mismo plano. ★

★ 7. **Area de un triángulo y volumen de un tetraedro.** — Si

$$Ax + By + C = 0 \qquad [1]$$

es la ecuación de una recta l, y $P(X; Y)$ es un punto arbitrario, la expresión

$$d = \frac{AX + BY + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

representa la distancia de P a l tomada con un cierto signo. Considérese ahora un triángulo con vértices $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$. La ecuación del lado A_1A_2 puede escribirse en forma de determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

y los correspondientes coeficientes A y B en la ecuación [1] son

$$A = y_1 - y_2 \qquad B = x_2 - x_1\,,$$

tal que

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} = l_{12}\,,$$

es la longitud del lado $A_1 A_2$. Luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} : l_{12}$$

representa la altura desde el vértice A_3 tomada positiva o negativa, y por lo tanto

$$\begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

es el doble del área del triángulo $A_1 A_2 A_3$ tomada con signo $+$ ó $-$. Llamando A a esta área, tenemos entonces:

$$\pm 2\,A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

y puede agregarse, dejando la demostración a cargo del lector, que el signo será $+$ ó $-$ según que el sentido del triángulo $A_1 A_2 A_3$ (con este ordenamiento de vértices) sea positivo o negativo.

La distancia de un punto P $(X; Y; Z)$ al plano

$$Ax + By + Cz + D = 0\,,$$

tomada con un cierto signo, está dada por la fórmula

$$d = \frac{AX + BY + CZ + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,.$$

Considérense ahora los cuatro vértices $A_1\,(x_1; y_1; z_1)$, $A_2\,(x_2; y_2; z_2)$, $A_3\,(x_3; y_3; z_3)$, $A_4\,(x_4; y_4; z_4)$ de un tetraedro. La ecuación del plano $A_1 A_2 A_3$ escrita en forma de determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z. \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

y los correspondientes coeficientes

$$A = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad C = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

representan numéricamente el doble del área de las proyecciones del triángulo $A_1 A_2 A_3$ sobre los planos coordenados YOZ, ZOX, XOY. Como se sabe por Geometría Analítica, la suma de los cuadrados de estas áreas es el cuadrado del área del triángulo $A_1 A_2 A_3$. Llamándolo Δ, tenemos, por lo tanto:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 4\,\Delta^2,$$

y la distancia del vértice A_4 del tetraedro a la cara opuesta, tomada con signo $+$ ó $-$, está dada por

$$d = \frac{1}{2\,\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\,\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

Desde que el volumen V del tetraedro es

$$V = \pm\frac{1}{3}\Delta\, d,$$

tenemos finalmente

$$\pm\, 6\, V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

El signo $\pm$ depende del sentido atribuído al tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$, tomándose los vértices en este orden; pero no es necesario para nosotros examinar aquí esta cuestión del signo ★.

★ 8. **Potencia de un punto con respecto a un círculo.** — Considérese un círculo Γ con centro en O y radio R y un punto P a una distancia $PO = d$ del centro. La expresión

$$p = d^2 - R^2,$$

se llama *potencia de P respecto de* Γ. Sea la ecuación de Γ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

que puede escribirse también en la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

siendo a, b las coordenadas del centro de Γ. Sustituyendo en ellas x, y por las coordenadas X, Y de P y teniendo en cuenta que

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 = d^2,$$

vemos que

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 - R^2 = p,$$

en otras palabras, la potencia de P $(X; Y)$ con respecto al círculo

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

es

$$p = X^2 + Y^2 + AX + BY + C.$$

Sea

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [1]$$

la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos $A_1\,(x_1; y_1)$, $A_2\,(x_2; y_2)$, $A_3\,(x_3; y_3)$. Desde que el coeficiente de $x^2 + y^2$ en el determinante [1] desarrollado es

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

que representa el doble del área A del triángulo $A_1 A_2 A_3$, se ve fácilmente que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

es el producto de $2\,\Delta$ por la potencia p de un punto $A_4\,(x_4; y_4)$ arbitrario con respecto a la circunferencia circunscripta al triángulo $A_1 A_2 A_3$. Por una redistribución de las filas en este determinante tenemos

$$-2\,Ap = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Combinando de una manera conveniente esta importante fórmula con la regla de multiplicación de determinantes, estaremos en condi-

ciones de obtener identidades notables que llevan a interesantes teoremas geométricos ★.

★ 9. **Corolarios geométricos.** — Multiplicando fila a fila el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & -2\,x_1 & -2\,y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & -2\,x_2 & -2\,y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & -2\,x_3 & -2\,y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & -2\,x_4 & -2\,y_4 & 1 \end{vmatrix} = -8\,Ap$$

por

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2+y_4^2 \end{vmatrix} = 2\,Ap$$

y poniendo, por brevedad:

$$l^2_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\,,$$

tenemos

$$-16\,A^2p^2 = \begin{vmatrix} 0 & l^2_{12} & l^2_{13} & l^2_{14} \\ l^2_{12} & 0 & l^2_{23} & l^2_{24} \\ l^2_{13} & l^2_{23} & 0 & l^2_{34} \\ l^2_{14} & l^2_{24} & l^2_{34} & 0 \end{vmatrix} \qquad [1]$$

Esta es una relación entre el área A de un triángulo $A_1 A_2 A_3$, la potencia del punto A_4 respecto a la circunferencia circunscripta al triángulo y las seis distancias a los puntos A_1, A_2, A_3, A_4 tomados dos a dos. Multiplicando las columnas 2, 3, 4 en el determinante [1] por $(l_{13}\,l_{14})^2$, $(l_{12}\,l_{14})^2$, $(l_{12}\,l_{13})^2$, respectivamente, tenemos:

$$-16\,A^2p^2(l_{12}\,l_{13}\,l_{14})^4 = \begin{vmatrix} 0 & (l_{12}\,l_{13}\,l_{14})^2 & (l_{12}\,l_{13}\,l_{14})^2 & (l_{12}\,l_{13}\,l_{14})^2 \\ l^2_{12} & 0 & (l_{12}\,l_{23}\,l_{14})^2 & (l_{12}\,l_{13}\,l_{24})^2 \\ l^2_{13} & (l_{13}\,l_{14}\,l_{23})^2 & 0 & (l_{12}\,l_{13}\,l_{34})^2 \\ l^2_{14} & (l_{13}\,l_{14}\,l_{24})^2 & (l_{12}\,l_{14}\,l_{34})^2 & 0 \end{vmatrix}$$

o sea

$$-16\,A^2p^2(l_{12}\,l_{13}\,l_{14})^4 = (l_{12}\,l_{13}\,l_{14})^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (l_{23}\,l_{14})^2 & (l_{13}\,l_{24})^2 \\ 1 & (l_{14}\,l_{23})^2 & 0 & (l_{12}\,l_{34})^2 \\ 1 & (l_{13}\,l_{24})^2 & (l_{12}\,l_{34})^2 & 0 \end{vmatrix}$$

y finalmente

$$-16\,A^2p^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (l_{14}\,l_{23})^2 & (l_{13}\,l_{34})^2 \\ 1 & (l_{14}\,l_{23})^2 & 0 & (l_{12}\,l_{34})^2 \\ 1 & (l_{13}\,l_{24})^2 & (l_{12}\,l_{34})^2 & 0 \end{vmatrix} \qquad [2]$$

Supóngase que A_4 se sitúa en el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo $A_1 A_2 A_3$; entonces: $p = -R^2$ y $l_{14} = l_{24} = l_{34} = R$. Simplificando el factor R^4 en ambos miembros de [1], llegamos a la siguiente relación entre los lados y el área de un triángulo, en forma de determinante:

$$16\,A^2 = -\begin{vmatrix} 0 & l^2_{12} & l^2_{13} & 1 \\ l^2_{12} & 0 & l^2_{22} & 1 \\ l^2_{13} & l^2_{23} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & l^2_{12} & l^2_{13} \\ 1 & l^2_{12} & 0 & l^2_{23} \\ 1 & l^2_{13} & l^2_{23} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Para utilizar notaciones más familiares, sean a, b, c los lados y sea $l_{12} = a$, $l_{13} = b$, $l_{23} = c$. Entonces:

$$16\,A^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

o bien, desarrollándolo

$$16\,A^2 = (a + b + c)\,(a + b - c)\,(a + c - b)\,(b + c - a)\,,$$

que es una fórmula bien conocida. Comparando el último determinante con el segundo miembro de [2] deducimos una fórmula interesante

$$16\,A^2 p^2 = (l_{23}\,l_{14} + l_{13}\,l_{24} + l_{12}\,l_{34})\,(l_{23}\,l_{14} + l_{13}\,l_{24} - l_{12}\,l_{34})$$
$$(l_{23}\,l_{14} + l_{12}\,l_{34} - l_{13}\,l_{24})\,(l_{13}\,l_{24} + l_{12}\,l_{34} - l_{23}\,l_{14}).$$

Supóngase que los cuatro puntos A_1, A_2, A_3, A_4 están en un mismo círculo; entonces $p = 0$ y, dejando de lado el factor positivo

$$l_{23}\,l_{14} + l_{13}\,l_{24} + l_{12}\,l_{34}\,,$$

tenemos una relación entre las distancias de cuatro puntos de una misma circunferencia:

$$(l_{23}\,l_{14} + l_{13}\,l_{24} - l_{12}\,l_{34})\,(l_{23}\,l_{14} + l_{12}\,l_{34} - l_{13}\,l_{24})\,(l_{13}\,l_{24} + l_{12}\,l_{34} - l_{23}\,l_{14}) = 0\,,$$

o bien, escribiendo por simplicidad:

$$l_{12} = a\,, \qquad l_{23} = b\,, \qquad l_{34} = c\,,$$
$$l_{14} = d\,, \qquad l_{13} = e\,, \qquad l_{24} = f\,,$$

entonces:

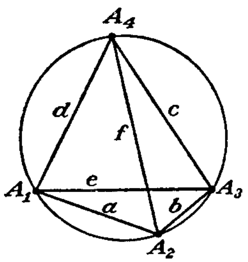
$$(bd + ef - ac)\,(bd + ac - ef)\,(ef + ac - bd) = 0\,.$$

Si $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ es un cuadrilátero convexo de lados $A_1\,A_2 = a$, $A_2\,A_3 =$

$= b$, $A_3 A_4 = c$, $A_4 A_1 = d$ y diagonales $A_1 A_3 = e$, $A_2 A_4 = f$, entonces necesariamente:

$$ac + bd - ef = 0\,.$$

Para demostrar ésto, téngase en cuenta que en $A_1 A_2 A_3 A_4$, que está inscripto en un círculo, la suma de los ángulos opuestos es 180° y por lo tanto hay un lado para el cual los dos ángulos adyacentes son obtusos.



Si se elige la nomenclatura de manera que ese lado sea b, entonces, evidentemente es:

$$e > a \;;\; e > b \;;\; f > b \;;\; f > c\,,$$

y tal que $ef > ac$ y luego

$$bd + ef - ac > 0\,.$$

Por otra parte:

$$ef - bd = e\,(f - b) - b\,(d - e)\,,$$

es positivo en el caso de que $d < e$, desde que $f > b$. Si $d > e$, se deduce de la desigualdad casi evidente

$$e + f > b + d$$

que

$$f - b > d - e$$

y nuevamente, que:

$$ef - bd > (d - e)\,(e - b) > 0\,.$$

Luego, en todos los casos, $ef > bd$ y

$$ef + ac - bd > 0.$$

Por lo tanto, si $A_1 A_2 A_3 A_4$ es un polígono convexo inscripto en una circunferencia existe la relación

$$ac + bd = ef\,,$$

entre el producto de las diagonales y la suma de los productos de lados opuestos, conocida en la geometría elemental como teorema de Ptolomeo ★.

★ 10. **Extensión a las tres dimensiones.** — No hay dificultad en extender las consideraciones de los Párrafos 8 y 9 a tres dimensiones. En primer lugar, la ecuación de una esfera circunscripta al tetraedro de vértices

$$A_1\,(x_1; y_1; z_1) \quad ; \quad A_2\,(x_2; y_2; z_2) \quad ; \quad A_3\,(x_3; y_3; z_3) \quad ; \quad A_4\,(x_4; y_4; z_4)\,,$$

puede presentarse en forma de determinante así:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Además, si R es el radio de la esfera y d la distancia de algún punto A_5 $(x_5; y_5; z_5)$ a su centro, entonces la cantidad

$$p = d^2 - R^2,$$

es la potencia de A_5 con respecto a la esfera, y como en el Párrafo 8 podemos establecer fácilmente la relación

$$6\,Vp = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix}$$

donde V es el volumen del tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$. Multiplicando fila a fila el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & -2\,x_1 & -2\,y_1 & -2\,z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & -2\,x_2 & -2\,y_2 & -2\,z_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & -2\,x_5 & -2\,y_5 & -2\,z_5 & 1 \end{vmatrix} = -\,48\,Vp$$

por

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & x_5^2+y_5^2+z_5^2 \end{vmatrix} = -\,6\,Vp$$

y haciendo, por brevedad:

$$l^2_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

tenemos:

$$288\;V^2 p^2 = \begin{vmatrix} 0 & l^2_{12} & l^2_{13} & l^2_{14} & l^2_{15} \\ l^2_{12} & 0 & l^2_{23} & l^2_{24} & l^2_{25} \\ l^2_{13} & l^2_{23} & 0 & l^2_{34} & l^2_{35} \\ l^2_{14} & l^2_{24} & l^2_{34} & 0 & l^2_{45} \\ l^2_{15} & l^2_{25} & l^2_{35} & l^2_{45} & 0 \end{vmatrix}.$$

Los números l_{ij} son las diez distancias entre los cinco puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Si A_5 se sitúa en el centro de la esfera circunscripta al tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$; entonces $p = -R^2$ y

$$l_{15} = l_{25} = l_{35} = l_{45} = R\,.$$

Simplificando el factor R^4 en ambos miembros, llegamos a la expresión, en forma de determinante, del volumen del tetraedro en términos de sus aristas:

$$288\ V^2 = \begin{vmatrix} 0 & l^2_{12} & l^2_{13} & l^2_{14} & 1 \\ l^2_{12} & 0 & l^2_{23} & l^2_{24} & 1 \\ l^2_{13} & l^2_{23} & 0 & l^2_{34} & 1 \\ l^2_{14} & l^2_{24} & l^2_{34} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Este determinante igualado a cero representa la relación entre las distancias mutuas de cuatro puntos coplanares cualesquiera. ★

CAPITULO XI

FUNCIONES SIMETRICAS

1. **Definición de funciones simétricas. Funciones sigma.** — Un polinomio en las variables $x_1; x_2; \ldots; x_n$ se llama polinomio *simétrico* o función simétrica de estas variables, si no cambia alterando el orden de las variables de manera arbitraria. Para ésto basta que el polinomio no altere intercambiando dos variables cualesquiera. Por ejemplo, los polinomios

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \quad ; \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc \quad ;$$
$$(a + b + c)\,abc\,,$$

son polinomios simétricos, o funciones simétricas, de las variables a, b, c. En igual forma:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 3\,(x_1 x_2 + x_2 x_3)\,(x_1 x_3 + x_2 x_4)\,(x_1 x_4 + x_2 x_3)$$

y

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)\,(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)\,(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)\,,$$

son funciones simétricas de las cuatro variables $x_1; x_2; x_3; x_4$. Efectuando la suma de todos los términos diferentes que se obtienen de un *término genérico*

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}\,,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son enteros positivos, reemplazando los índices $1, 2, \ldots, m$ por todas las posibles variaciones de m números tomados de los $1, 2, \ldots, n$, se obtiene una función simétrica de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que se llama *función sigma*, del tipo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ y se indica con el signo [1]

$$\Sigma\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}\,.$$

Por ejemplo, para $n = 4$:

$$\Sigma\, x_1^2 x_2^2 x_3 = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^2 x_2 + x_2^2 x_3^2 x_1 + x_1^2 x_2^2 x_4 + x_1^2 x_4^2 x_2 +$$
$$+ x_2^2 x_4^2 x_1 + x_1^2 x_3^2 x_4 + x_1^2 x_4^2 x_3 +$$
$$+ x_3^2 x_4^2 x_1 + x_2^2 x_3^2 x_4 + x_2^2 x_4^2 x_3 + x_3^2 x_4^2 x_2$$

---

[1] Más generalmente, $\Sigma\, g\,(x_1; x_2; \ldots; x_m)$ significa la suma de todos los términos diferentes que se obtienen reemplazando $1, 2, \ldots m$ por todas las variaciones posibles de m números tomados entre $1, 2, \ldots, n$.

es una función sigma del tipo (2; 2; 1) en las variables x_1, x_2, x_3, x_4.

Entre las funciones sigma son especialmente importantes las llamadas *funciones simétricas elementales*:

$$\Sigma\, x_1 = f_1 \quad ; \quad \Sigma\, x_1 x_2 = f_2 \quad ; \quad \Sigma\, x_1 x_2 x_3 = f_3 \; ; \; \ldots \; ;$$
$$; \quad \Sigma\, x_1 x_2 \ldots x_n = x_1 x_2 \ldots x_n = f_n .$$

También son importantes las « sumas de potencias »

$$s_\alpha = \Sigma\, x_{1\alpha} = x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_{n\alpha}.$$

Si una función simétrica $\phi\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ contiene un término

$$a x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha m},$$

contendrá el conjunto de términos

$$a\, \Sigma\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha m},$$

y si éstos no agotan todos los términos de $\phi\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, entonces la diferencia

$$\phi\,(x_1; x_2; \ldots; x_n) - a\, \Sigma\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha m},$$

contendrá términos de la forma

$$b x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_r^{\beta_r},$$

y por lo tanto, también:

$$b\, \Sigma\, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_r^{\beta r}.$$

Continuando en la misma forma, llegamos a la conclusión de que toda función simétrica es una combinación lineal de funciones sigma:

$$\phi\,(x_1; x_2; \ldots; x_n) = a\, \Sigma\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha m} + b\, \Sigma\, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_r^{\beta r} +$$
$$+ c\, \Sigma\, x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_s^{\gamma_s} + \ldots$$

El proceso de descomponer una función simétrica en funciones sigma se indicará por medio de un ejemplo.

Ejemplo. Sea

$$\phi = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)\,(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)\,(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)$$

Este es un polinomio homogéneo simétrico de grado 3. Los términos genéricos de las funciones sigma que lo componen serán:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4}$$

donde

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3$$

y supondremos que $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \alpha_4 \geqq 0$. Los únicos grupos de exponentes posibles son

α_1	α_2	α_3	α_4
3	0	0	0
2	1	0	0
1	1	1	0

y quedan sólo por determinar los coeficientes de los términos

$$ax_1^3 \quad ; \quad bx_1^2 x_2 \quad ; \quad cx_1 x_2 x_3 .$$

Para determinar a y b podemos hacer $x_3 = x_4 = 0$ en ϕ, lo que no afecta a los términos que sólo poseen las variables x_1 y x_2. ϕ queda entonces:

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)(x_1 - x_2).$$

Es fácil ver que $a = 1$; $b = -1$. Para hallar c podemos hacer $x_4 = 0$ en ϕ; entonces ϕ queda:

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(x_1 - x_2 - x_3)$$

Para hallar el término en $x_1 x_2 x_3$ hacemos notar que puede obtenerse de las siguientes maneras:

1. Tomando x_1, x_2, x_3 de los factores 1, 2, 3 tenemos su producto: $+ x_1 x_2 x_3$
2. Tomando x_1, x_3, x_2 de los factores 1, 2, 3 tenemos su producto: $- x_1 x_2 x_3$
3. Tomando x_2, x_1, x_3 de los factores 1, 2, 3 tenemos su producto: $- x_1 x_2 x_3$
4. Tomando x_2, x_3, x_1 de los factores 1, 2, 3 tenemos su producto: $+ x_1 x_2 x_3$
5. Tomando x_3, x_1, x_2 de los factores 1, 2, 3 tenemos su producto: $+ x_1 x_2 x_3$
6. Tomando x_3, x_2, x_1 de los factores 1, 2, 3 tenemos su producto: $+ x_1 x_2 x_3$

Total: $2\, x_1 x_2 x_3$

Por lo tanto, $c = 2$ y

$$\phi = \Sigma x_1^3 - \Sigma x_1^2 x_2 + 2 \Sigma x_1 x_2 x_3 .$$

Si en una función simétrica $\phi(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ sustituímos las variables por los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ que son raíces de una ecuación

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

el número resultante $\phi(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ se llama *función simétrica de las raíces de esta ecuación*. Esta terminología no es correcta puesto que un número definido no puede ser llamado función, pero está consagrada por el uso y nosotros la utilizaremos. Así, las funciones elementales simétricas de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si la ecuación se escribe en la forma:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

son:

$$\Sigma\,\alpha_1 = -p_1 \quad ; \quad \Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2 = p_2 \quad ; \quad \Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = -p_3\ ;\ \ldots\ ;$$

$$\Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n = (-1)^n\,p_n$$

ó

$$\Sigma\,\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0} \quad ; \quad \Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0} \quad ; \quad \Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0}\ ;\ \ldots\ ;$$

$$\Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n = (-1)^n\,\frac{a_n}{a_0}.$$

Una función racional en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\frac{\phi\,(x_1;\,x_2;\,\ldots\,;\,x_n)}{\psi\,(x_1;\,x_2;\,\ldots\,;\,x_n)}\,,$$

donde el numerador y el denominador son polinomios, se llama *simétrica* si no se altera para todas las permutaciones de las variables. Así

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}\,,$$

es una función racional simétrica de las variables a, b, c. Si las variables en una función racional simétrica se reemplazan por las raíces de una ecuación, el número que resulta se llama también función simétrica de las raíces de esa ecuación; una terminología incorrecta que, sin embargo, acostumbra a usarse.

Problemas

Verificar que las siguientes funciones son simétricas y descomponerlas en funciones sigma:

1. $(x_1 + x_2)\,(x_1 + x_3)\,(x_2 + x_3)$.

2. $(x_1 + x_2)^2\,x_3 + (x_1 + x_3)^2\,x_2 + (x_2 + x_3)^2\,x_1$.

3. $(x_1 - x_2)^2\,x_3 + (x_1 - x_3)^2\,x_2 + (x_2 - x_3)^2\,x_1$.

4. $(x_1 + x_2)^2\,x_3^2 + (x_1 + x_3)^2\,x_2^2 + (x_2 + x_3)^2\,x_1^2$.

5. $(x_1 - x_2)^2\,(x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_2)^2\,(x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2\,(x_2 - x_3)^2$.

6. $(x_1 - x_2)^2\,(x_1 - x_3)^2\,(x_2 - x_3)^2$.

7. $(x_1\,x_2 + x_3\,x_4)^2 + (x_1\,x_3 + x_2\,x_4)^2 + (x_1\,x_4 + x_2\,x_3)^2$.

8. $(x_1\,x_2 + x_3\,x_4)\,(x_1\,x_3 + x_2\,x_4)\,(x_1\,x_4 + x_2\,x_3)$.

9. $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 + (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 + (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2$.

10. $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2\,(x_1+x_3-x_2-x_4)^2+(x_1+x_2-x_3-x_4)^2\,(x_1+x_4-x_2-x_3)^2 +$
$+\,(x_1+x_3-x_2-x_4)^2\,(x_1+x_4-x_2-x_3)^2$.

2. Fórmulas de Newton. — Las sumas de potencias

$$s_\alpha = x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha,$$

pueden expresarse como polinomios en las funciones elementales simétricas, o lo que es lo mismo, en términos de los coeficientes de

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n.$$

Esto puede verse de la siguiente manera: En muchas oportunidades hicimos uso de la identidad

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}.$$

Escribámosla en la forma

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x - x_n}, \qquad [1]$$

y tengamos en cuenta que:

$$\frac{f(x)}{x - x_i} = x^{n-1} + f_1(x_i)\, x^{n-2} + f_2(x_i)\, x^{n-3} + \ldots + f_{n-1}(x_i),$$

donde

$$f_1(x) = x + p_1 \quad ; \quad f_2(x) = x^2 + p_1 x + p_2 \quad ;$$

$$f_3(x) = x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3$$

y, en general:

$$f_k(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_k,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Introduciendo las sumas s_α tenemos:

$$f_k(x_1) + f_k(x_2) + \ldots + f_k(x_n) = s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + np_k,$$

de modo que el coeficiente de x^{n-k-1} en el segundo miembro de la identidad [1] es:

$$s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + np_k.$$

En el primer miembro de la misma identidad el coeficiente de x^{n-k-1} es $(n-k)\, p_k$, e igualando ambas expresiones obtenemos:

$$s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + n\, p_k = (n-k)\, p_k$$

ó

$$s_k + p_1 s_{k-1} + \ldots + kp_k = 0,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Esta relación sigue siendo válida para $k = n$. De hecho:

$$f(x_i) = x_i^n + p_1 x_i^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

y, efectuando la suma de estas identidades para $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos:

$$s_n + p_1 s_{n-1} + \ldots + np_n = 0 .$$

Así:

$$s_1 + p_1 = 0$$
$$s_2 + p_1 s_1 + 2 p_2 = 0$$
$$s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3 p_3 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n + p_1 s_{n-1} + p_2 s_{n-2} + \ldots + np_n = 0 .$$

Estas son las llamadas *fórmulas de Newton.* De estas identidades podemos calcular sucesivamente las sumas de potencias de $s_1, s_2, \ldots, s_n$, en función de los coeficientes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ del polinomio:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n ,$$

y recíprocamente, estos coeficientes por medio de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Las expresiones de $s_1, s_2, s_3, \ldots$ en función de $p_1, p_2, p_3, \ldots$, por ser identidades, serán válidas si se reemplazan $p_1, p_2, \ldots$ por números, y $x_1, x_2, \ldots$ por las raíces de la ecuación

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0 .$$

De esta manera, las fórmulas de Newton permiten calcular por recurrencia las sumas de potencias similares de las raíces de una ecuación, y recíprocamente, podemos calcular los coeficientes de esta ecuación si se conocen las sumas de potencias similares de las raíces. Efectuando la suma de las identidades

$$x_i^{\nu} f(x_i) = x_i^{n+\nu} + p_1 x_i^{n+\nu-1} + \ldots + p_n x_i^{\nu} = 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos, tomando $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, las relaciones de recurrencia

$$s_{n+1} + p_1 s_n + \ldots + p_n s_1 = 0$$
$$s_{n+2} + p_1 s_{n+1} + \ldots + p_n s_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

que nos permite expresar $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ en función de $p_1, p_2, \ldots$ Las relaciones de recurrencia obtenidas tomando $\nu = -1, -2, \ldots$

$$s_{n-1} + p_1 s_{n-2} + \ldots + p_n s_{-1} = 0$$
$$s_{n-2} + p_1 s_{n-3} + \ldots + p_n s_{-2} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

servirán, en la misma forma, para calcular las sumas de las potencias negativas de las raíces, supuesto $p_n \neq 0$. Las relaciones de recurrencia

para s_{n+1}, $s_{n+2}\ldots$ parecen diferentes de las fórmulas de Newton, pero coincidirán con ellas si establecemos que $p_r = 0$ cuando $r > n$. Damos a continuación las expresiones de $s_1, s_2, \ldots, s_6$ en función de $p_1, p_2, \ldots, p_6$:

$$s_1 = -p_1$$

$$s_2 = p_1^2 - 2p_2$$

$$s_3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - 3p_3$$

$$s_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 4p_1p_3 - 4p_4 + 2p_2^2$$

$$s_5 = -p_1^5 + 5p_1^3p_2 + 5p_1p_4 - 5p_3p_1^2 - 5p_1p_2^2 + 5p_2p_3 - 5p_5$$

$$s_6 = p_1^6 - 6p_1^4p_2 + 6p_1^3p_3 - 6p_1^2p_4 - 12p_1p_2p_3 + 6p_2p_4 + 6p_1p_5 -$$
$$- 6p_6 + 9p_1^2p_2^2 - 2p_2^3 + 3p_3^2.$$

Obsérvese que $p_r = 0$ si r es mayor que el grado de la ecuación.

Problemas

Calcular por recurrencia:

1. $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ para $x^3 - 3x + 1 = 0$.

2. s_1, s_2, s_3, s_4 para $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

3. s_1, s_2, s_3, s_4 para $x^4 - 4x - 1 = 0$.

4. s_{-2}, s_{-3} para $2x^4 - 6x^2 + x + 1 = 0$.

5. $s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}, s_{-4}$ para $x^5 - x^3 + x^2 + 1 = 0$.

6. s_1, s_2, s_3 para $2x^4 + x^2 - x + 1 = 0$.

Hallar las ecuaciones de menor grado que satisfacen las condiciones.

7. $s_1 = 0$; $s_2 = 5$; $s_3 = -6$.

8. $s_1 = 0$; $s_2 = 0$; $s_3 = s_4 = 1$.

9. $s_1 = 18$; $s_2 = 162$; $s_3 = 1701$.

10. $s_1 = 1$; $s_2 = -1$; $s_3 = 1$; $s_4 = -1$; $s_5 = 1$.

11. $s_{-1} = -1$; $s_{-2} = 2$; $s_{-3} = -3$.

12. $s_{-1} = 0$; $s_{-2} = 1$; $s_{-3} = 0$; $s_4 = 3$.

13. Si una raíz r de una ecuación $f(x) = 0$ es mayor en valor absoluto que las demás raíces, demostrar que la razón

$$\frac{s_{n+1}}{s_n}$$

tiende al límite r al tender n a infinito. Por lo tanto, para n suficientemente grande es:

$$r = \frac{s_{n+1}}{s_n}$$

aproximadamente; y, si todas las raíces son reales y positivas:

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} < r < \sqrt[n]{s_n}$$

Esta es la idea fundamental del método de Daniel Bernoulli para calcular por aproximación la raíz numéricamente mayor de una ecuación. ¿Puede idearse un método similar para calcular la raíz numéricamente menor?

14. Aplicar este método a las ecuaciones

$$(a)\ x^2 - x - 1 = 0 \qquad (b)\ x^2 - 7x + 4 = 0$$

tomando hasta $n = 10$, y examinar la aproximación obtenida.

15. Calcular la menor raíz de $x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ por el método de Daniel Bernoulli, tomando hasta $n = 10$, y examinar la aproximación.

*** 16.** Sean $y_1, y_2, \ldots, y_m$, donde $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$, las sumas de las raíces de $f(x) = 0$ tomadas de a dos, y sea:

$$S_k = y_1^k + y_2^k + \ldots + y_m^k.$$

Demostrar que:

$$2S_k + 2^k s_k = s_0 s_k + \binom{k}{1} s_1 s_{k-1} + \binom{k}{2} s_2 s_{k-2} + \ldots + s_k s_0 .$$

Sugestión: El segundo miembro es:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x_j + x_i)^k.$$

*** 17.** Si las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ son α, β, γ, hallar una ecuación cuyas raíces sean $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$.

18. $y_1, y_2, \ldots, y_m$, donde $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$, representan los cuadros de las diferencias entre dos raíces de una ecuación de grado n y sea:

$$S_k = y_1^k + y_2^k + \ldots + y_m^k.$$

Demostrar que:

$$2S_k = s_0 s_{2k} - \binom{2k}{1} s_1 s_{2k-1} + \binom{2k}{2} s_2 s_{2k-2} - \ldots + s_{2k} s_0 .$$

Sugestión: El segundo miembro es

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x_j - x_i)^{2k}.$$

*** 19.** Si las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ son α, β, γ, hallar una ecuación con raíces

$$(\alpha - \beta)^2 \ ; \ (\alpha - \gamma)^2 \ ; \ (\beta - \gamma)^2.$$

*** 20.** Resolver el mismo problema para la ecuación $x^3 - 7x + 7 = 0$.

*** 21.** Hallar el límite inferior de las distancias entre dos raíces reales de las ecuaciones: (*a*) $x^3 - 3x + 1 = 0$; (*b*) $x^3 - 7x + 7 = 0$. ¿Cómo puede ayudarnos el conocimiento de este límite inferior para separar las raíces?

★ 3. **Teorema fundamental sobre funciones simétricas.** — El

hecho de que las sumas de potencias puedan expresarse como polinomios de las funciones simétricas elementales, es un caso particular del siguiente teorema general:

Teorema fundamental sobre funciones simétricas: Toda función simétrica de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puede expresarse como un polinomio en las funciones simétricas elementales. Además, los coeficientes de este polinomio se obtienen por sumas y restas de los coeficientes de la función simétrica. En particular, si estos últimos son enteros, los primeros serán también enteros.

Demostracion: Entre las varias demostraciones conocidas de este teorema, elegiremos una elegante demostración realizada por Cauchy. En primer lugar, demostraremos el teorema para el caso de dos variables x_1, x_2 cuyas funciones simétricas elementales son:

$$f_1 = x_1 + x_2 \quad ; \quad f_2 = x_1 x_2 .$$

Sea $F(x_1; x_2)$ una función simétrica. Ordenada en potencias de x_1, puede escribirse así:

$$F(x_1; x_2) = A_0 x_1^m + A_1 x_1^{m-1} + \ldots + A_m ,$$

donde $A_0, A_1, \ldots, A_m$ son polinomios en x_2. Reemplazando x_2 por $f_1 - x_1$ y ordenando el polinomio resultante según las potencias de x_1 y f_1 también en potencias de x_1 nos queda:

$$F(x_1; x_2) = B_0 x_1^l + B_1 x_1^{l-1} + \ldots + B_l ,$$

donde $B_0, B_1, \ldots, B_l$ son polinomios en f_1. Introduciendo una nueva variable t en lugar de x_1, dividiremos:

$$\phi(t) = B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + \ldots + B_l$$

por

$$f(t) = t^2 - f_1 t + f_2 .$$

Entonces, vemos que, idénticamente en t:

$$\phi(t) = f(t)\, Q(t) + Ct + D ,$$

donde C y D son polinomios en f_1, f_2 con coeficientes hallados en la

forma que se establece en el teorema. En esta identidad hágase $t = x_1$; entonces, por ser $f(x_1) = 0$ y $\phi(x_1) = F(x_1; x_2)$:

$$F(x_1; x_2) = Cx_1 + D.$$

Intercámbiese ahora x_1 y x_2. El primer miembro no cambia y tampoco C y D; por lo tanto:

$$Cx_1 + D = Cx_2 + D$$

o bien:

$$C(x_1 - x_2) = 0,$$

idénticamente en x_1, x_2, y por lo tanto $C = 0$. Entonces es

$$F(x_1, x_2) = D,$$

y D es un polinomio en f_1 y f_2, lo que demuestra el teorema para dos variables. En adelante procederemos por inducción. Suponiendo que el teorema se cumple en el caso de funciones simétricas de $n - 1$ variables, demostraremos su validez para funciones simétricas de n variables. Llamando $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ las funciones simétricas elementales de las $n - 1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$, tendremos, evidentemente:

$$f_1 = x_1 + \phi_1 \quad ; \quad f_2 = x_1 \phi_1 + \phi_2 \, ; \ldots ; f_{n-1} = x_1 \phi_{n-2} + \phi_{n-1},$$

por consiguiente, recíprocamente:

$$\phi_1 = -x_1 + f_1 \quad ; \quad \phi_2 = x_1^2 - x_1 f_1 + f_2 \, ; \ldots ; \phi_{n-1} =$$
$$= (-1)^{n-1}[x_1^{n-1} - x_1^{n-2} f_1 + \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1}].$$

Sea ahora $F(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, o simplemente F, una función simétrica de n variables. Ordenándola en potencias de x_1, podemos escribir:

$$F = A_0 x_1^m + A_1 x_1^{m-1} + \ldots + A_m,$$

y aquí los coeficientes son funciones simétricas de $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Suponiendo que el teorema se cumple en el caso de $n - 1$ variables, podemos expresar $A_0, A_1, \ldots, A_m$ como polinomios en $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$. Si sustituímos $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}$ por sus expresiones en $x_1, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, los coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_m$ quedarán expresados como polinomios en $x_1, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Sustituyendo estas expresiones en F y ordenando nuevamente la expresión resultante según las potencias de x_1, podemos escribir:

$$F = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \ldots + B_l,$$

donde $B_0, B_1, \ldots, B_l$ son polinomios en $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$. Introduciendo una nueva variable t, escribimos:

$$\phi(t) = B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + \ldots + B_l$$

y dividimos $\phi(t)$ por:

$$f(t) = t^n - f_1 t^{n-1} + f_2 t^{n-2} + \ldots + (-1)^n f_n .$$

El resto será de grado no mayor que $n - 1$, y tendremos la identidad en t:

$$\phi(t) = f(t)\,Q(t) + C_0 t^{n-1} + C_1 t^{n-2} + \ldots + C_{n-1},$$

donde $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$, son polinomios en $f_1, f_2, \ldots, f_n$ con coeficientes hallados en la forma establecida en el teorema. Hacemos ahora en esta identidad $t = x_1$. Teniendo en cuenta que $f(x_1) = 0$, obtenemos:

$$F(x_1; x_2; \ldots; x_n) = C_0 x_1^{n-1} + C_1 x_1^{n-2} + \ldots + C_{n-1} .$$

Aquí el segundo miembro no varía intercambiando x_1 con $x_2, x_3, \ldots, x_n$, ni tampoco los coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ de modo que son válidas las siguientes identidades en $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{l} C_0 x_1^{n-1} + C_1 x_1^{n-2} + \ldots + C_{n-1} - F = 0 \\ C_0 x_2^{n-1} + C_1 x_2^{n-2} + \ldots + C_{n-1} - F = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0 x_n^{n-1} + C_1 x_n^{n-2} + \ldots + C_{n-1} - F = 0 \end{array}$$

Esto significa que:

$$C_0 t^{n-1} + C_1 t^{n-2} + \ldots + C_{n-1} - F ,$$

se anula para $t = x_1, x_2, \ldots, x_n$, y ésto es posible sólo si

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_{n-2} = 0 \quad ; \quad C_{n-1} - F = 0$$

de modo que

$$F = C_{n-1} .$$

Pero C_{n-1} es un polinomio en las funciones elementales simétricas $f_1, f_2, \ldots, f_n$, lo que comprueba el teorema. Se entenderá mejor la demostración considerando un ejemplo particular.

Ejemplo. Expresar

$$F = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3),$$

en función de

$$f_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad f_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \quad ; \quad f_3 = x_1 x_2 x_3 .$$

Ordenando en potencias de x_1, tenemos:

$$F = (x_2 + x_3) x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 x_1 + x_2 x_3 (x_2 + x_3) .$$

Sustituyendo aquí:

$$x_2 + x_3 = f_1 - x_1 \quad ; \quad x_2 x_3 = x_1^2 - f_1 x_1 + f_2 ,$$

y ordenando nuevamente según las potencias de x_1:

$$F = -x_1^3 + f_1 x_1^2 - f_2 x_1 + f_1 f_2 .$$

Haciendo

$$\phi(t) = -t^3 + f_1 t^2 - f_2 t + f_1 f_2 ,$$

y dividiendo por

$$f(t) = t^3 - f_1 t^2 + f_2 t - f_3 ,$$

el resto será:

$$f_1 f_2 - f_3 ,$$

y, por lo tanto:

$$F = f_1 f_2 - f_3 . \bigstar$$

Problemas

Expresar por medio de las funciones simétricas elementales:

1. $x_1^2 (x_2 + x_3) + x_2^2 (x_1 + x_3) + x_3^2 (x_1 + x_2)$.

2. $(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2$.

3. $\Sigma\, x_1^2 x_2 x_3$ para $n = 3$. **4.** $\Sigma\, x_1^2 x_2^2$ para $n = 4$.

4. **Métodos prácticos.** — La demostración del teorema fundamental nos proporciona también un método para la representación efectiva de una función simétrica como polinomio en las funciones simétricas elementales. En la práctica, sin embargo, es más conveniente utilizar con este propósito otros métodos más expeditivos; haremos breve mención de dos de ellos. Indiquemos con el símbolo

$$S\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} ,$$

la suma de todos los términos que se obtienen de un término genérico

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} ,$$

sustituyendo los índices $1, 2, \ldots, m$ por todas las posibles variaciones de m números tomados entre los $1, 2, \ldots, n$. Si entre los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ no hay dos iguales, el nuevo símbolo, que puede ser llamado función S, coincide con la función sigma con el mismo término genérico. Si alguno de los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ son iguales, entonces el nuevo símbolo contiene una repetición de términos que en la función sigma sucede sólo una vez. Si entre los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ hay grupos $\lambda, \mu, \ldots, \sigma$ números iguales, es fácil ver que cada término de la función sigma se presenta en la función S $\lambda!\,\mu! \ldots \sigma!$ veces, de modo que:

$$S x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} = \lambda!\,\mu! \ldots \sigma!\,\Sigma\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} .$$

Por ejemplo:

$$\Sigma\, x_1^\alpha x_2^\alpha = \frac{1}{2} S\, x_1^\alpha x_2^\alpha \quad ; \quad \Sigma\, x_1^\alpha x_2^\alpha x_3^\beta = \frac{1}{2} S\, x_1^\alpha x_2^\alpha x_3^\beta ,$$

siendo $\beta \neq \alpha$. También:

$$\Sigma\, x_1^\alpha x_2^\alpha x_3^\alpha = \frac{1}{6} S\, x_1^\alpha x_2^\alpha x_3^\alpha \quad ; \quad \Sigma\, x_1^\alpha x_2^\alpha x_3^\beta x_4^\beta = \frac{1}{4} S x_1^\alpha x_2^\alpha x_3^\beta x_4^\beta ,$$

si $\beta \neq \alpha$. Tenemos, en todos los casos:

$$S x_1^\alpha \,.\, S x_1^\beta = S x_1^{\alpha+\beta} + S x_1^\alpha x_2^\beta ,$$

por consiguiente:

$$S x_1^\alpha x_2^\beta = s_\alpha s_\beta - s_{\alpha+\beta} ,$$

puesto que, en general:

$$S x_1^m = \Sigma\, x_1^m = s_m .$$

De manera que es posible expresar mediante sumas de potencias todas las doble sigmas

$$\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta .$$

Para expresar en la misma forma las triple sigmas

$$\Sigma\, x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma ;$$

nótese que en todos los casos

$$S x_1^\alpha x_2^\beta \,.\, S x_1^\gamma = S x_1^{\alpha+\gamma} x_2^\beta + S x_1^\alpha x_2^{\beta+\gamma} + S x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$$

por consiguiente:

$$S x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma = s_\alpha s_{\beta+\gamma} + s_\beta s_{\alpha+\gamma} + s_\gamma s_{\alpha+\beta} - 2\, s_{\alpha+\beta+\gamma} - s_\alpha s_\beta s_\gamma .$$

El mismo método puede usarse para expresar mediante sumas de potencias sigmas cuádruples, quíntuples, etc. Como las sumas de potencias pueden expresarse por medio de las funciones simétricas elementales, todas las sigmas pueden ser expresadas mediante estas funciones.

Ejemplo 1. Consideremos la función simétrica

$$\begin{aligned} F &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)(x_1 + x_4 - x_2 - x_3) = \\ &= \Sigma\, x_1^3 - \Sigma\, x_1^2 x_2 + 2\, \Sigma\, x_1 x_2 x_3 . \end{aligned}$$

Aquí es

$$\Sigma\, x_1^2 x_2 = S x_1^2 x_2 = s_1 s_2 - s_3 \ ; \ \Sigma\, x_1^3 = s_3 .$$

Designando

$$-p = \Sigma\, x_1 \quad ; \quad q = \Sigma\, x_1 x_2 \quad ; \quad -r = \Sigma\, x_1 x_2 x_3 \quad ; \quad s = x_1 x_2 x_3 x_4 ,$$

las funciones simétricas elementales, tenemos:

$$s_1 = -p \quad ; \quad s_2 = p^2 - 2q \quad ; \quad s_3 = -p^3 + 3pq - 3r ,$$

y entonces

$$F = -p^3 + 4pq - 8r .$$

Ejemplo 2. Sea ω una raíz cúbica imaginaria de la unidad y

$$F = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega\ x_2 + \omega x_3) =$$
$$= \Sigma x_1^2 - \Sigma x_1 x_2 .$$

Conservando las notaciones anteriores:

$$\Sigma x_1^2 = p^2 - 2q \quad ; \quad \Sigma x_1 x_2 = q ,$$

y entonces

$$F = p^2 - 3q .$$

Ejemplo 3. Sea

$$F = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 + (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3 .$$

Por cálculo directo:

$$F = 2 \Sigma x_1^3 - 3 \Sigma x_1^2 x_2 + 12 x_1 x_2 x_3 .$$

Sustituyendo aquí:

$$\Sigma x_1^3 = -p^3 + 3pq - 3r \quad ; \quad \Sigma x_1^2 x_2 = s_1 s_2 - s_3 = -pq + 3r \quad ; \quad x_1 x_2 x_3 = -r ,$$

hallamos

$$F = -2p^3 + 9pq - 27r .$$

El segundo método para la representación conveniente de funciones simétricas por medio de las funciones simétricas elementales, será explicado por medio de ejemplos.

Ejemplo 4. Sea

$$F = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 + (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 + (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2 .$$

Este polinomio es homogéneo de grado 2, de modo que reemplazando x_1, x_2, x_3, x_4 por kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, siendo k arbitrario, F se transforma en $k^2 F$. Si ahora F se expresa por medio de las funciones simétricas elementales, para las cuales conservamos las notaciones $-p, q, -r, s$, notamos que consistirá sólo de monomios de la forma

$$p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta ,$$

multiplicados por factores constantes. Reemplazando x_1, x_2, x_3, x_4 por kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, es evidente que p, q, r, s quedan reemplazadas por $kp, k^2 q, k^3 r, k^4 s$, y los monomios anteriores se transforman en

$$k^{\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta} p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta ,$$

y puesto que F está multiplicada solamente por k^2, la suma $\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta$ en todos los términos debe tener el mismo valor 2. Es decir:

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta = 2 .$$

Además, puesto que 2 es la mayor potencia de x_1 que existe en F, se desprende del Párrafo 7 que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \leqq 2 .$$

Estas dos condiciones con respecto a α, β, γ, δ se satisfacen sólo para

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 1 \quad ; \quad \gamma = 0 \quad ; \quad \delta = 0 ;$$

$$\alpha = 2 \quad ; \quad \beta = 0 \quad ; \quad \gamma = 0 \quad ; \quad \delta = 0 ;$$

La expresión de F en función de p, q, r, s es, por lo tanto, de la forma

$$F = Ap^2 + Bq .$$

Los coeficientes desconocidos se determinan tomando valores particulares de x_1, x_2, x_3, x_4 e igualando los valores de F hallados directamente, con los que resulten de la sustitución de los valores particulares de p y q. Las dos relaciones independientes entre A y B obtenidas de esta manera, bastarán para determinarlos. Sean x_1, x_2, x_3, x_4 las raíces de la ecuación:

$$x^4 - x^3 = 0 ,$$

de modo que:

$$x_1 = 1 \ ; \ x_2 = x_3 = x_4 = 0 .$$

Será entonces:

$$F = 3 \quad ; \quad p = 1 \quad ; \quad q = 0 ,$$

y en consecuencia, $A = 3$. Sean ahora x_1, x_2, x_3, x_4 las raíces de la ecuación

$$x^4 - 2\,x^3 + x^2 = 0 ,$$

de modo que:

$$x_1 = x_2 = 1 \ ; \ x_3 = x_4 = 0 .$$

Será, entonces: $F = 4$; $p = -2$;$q = 1$ y

$$4\,A - B = 4 ;$$

en consecuencia

$$B = 8 ,$$

y por lo tanto:

$$F = 3\,p^2 - 8\,q .$$

Ejemplo 5. Sea

$$F = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2\,(x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 +$$

$$+ (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2\,(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2\,(x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2 .$$

Este polinomio es homogéneo de grado 4; además, el exponente de la mayor potencia de x_1 que aparece en F es 4. Por las mismas razones que en el ejemplo anterior, para todos los monomios

$$p^\alpha\, q^\beta\, r^\gamma\, s^\delta ,$$

que entran en la expresión de F debemos tener

$$\alpha + 2\,\beta + 3\,\gamma + 4\,\delta = 4$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \leqq 4 .$$

Y los únicos números que satisfacen estas condiciones son:

α	β	γ	δ
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0
0	2	0	0
4	0	0	0

y por lo tanto, la forma literal de F es:

$$F = As + Bpr + Cp^2q + Dq^2 + Ep^4 .$$

Una comparación de los coeficientes de $x_1{}^4$ en ambos miembros nos da $E = 3$. Además, considerando las ecuaciones particulares

$$x^4 - 1 = 0. \quad \text{Raíces: } x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = i;\ x_4 = -i;$$
$$p = q = r = 0;\ s = -1.$$

$$(x^2 - 1)^2 = 0. \quad \text{Raíces: } x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1;$$
$$p = 0;\ q = -2;\ r = 0;\ s = 1.$$

$$x\,(x - 1)\,(x^2 - 1) = 0. \quad \text{Raíces: } x_1 = 1;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1;\ x_4 = 0;$$
$$p = -1;\ q = -1;\ r = 1;\ s = 0.$$

$$(x + 1)^4 = 0. \quad \text{Raíces: } x_1 = -1;\ x_2 = -1;\ x_3 = -1;\ x_4 = -1;$$
$$p = 4\ ;\ q = 5\ ;\ r = 4\ ;\ s = 1.$$

Para estas ecuaciones la sustitución da, respectivamente:

$$F = 64 \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad F = 19 \quad ; \quad F = 0 .$$

Por otra parte, considerando los valores correspondientes de p, q, r, s tenemos

$$-A = 64 \quad ; \quad A + 4\,D = 0 \quad ; \quad -B - C + D + E = 19 \quad ;$$
$$A + 16\,B + 96\,C + 36\,D + 256\,E = 0 ,$$

que da:

$$A = -64 \quad ; \quad D = 16 \quad ; \quad B = 16 \quad ; \quad C = -16 \quad ; \quad E = 3 .$$

El resultado final es, por lo tanto:

$$F = 3\,p^4 - 16\,p^2\,q + 16\,pr + 16\,q^2 - 64\,s .$$

Problemas

Expresar en función de los coeficientes las siguientes funciones simétricas de las raíces:

1. $\Sigma\, x_1{}^2\, x_2$.

2. $\Sigma\, x_1{}^2\, x_2{}^2$.

3. $\Sigma\, x_1{}^3\, x_2$.

4. $\Sigma\, x_1{}^3\, x_2{}^2$.

5. $\Sigma x_1^2 x_2 x_3$.

6. $\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3$.

7. $\Sigma x_1^3 x_2^2 x_3$.

8. $\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$.

9. $(x_1 - x_2)^2 x_3 + (x_1 - x_3)^2 x_2 + (x_2 - x_3)^2 x_1$.

10. $(x_1 + x_2)^2 x_3^2 + (x_1 + x_3)^2 x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 x_1^2$.

11. $(x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3)$.

12. Si las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ se indican con α, β, γ, hallar la ecuación cuyas raíces son $\alpha + \alpha^{-1}$; $\beta + \beta^{-1}$; $\gamma + \gamma^{-1}$.

13. Con las mismas notaciones y para la misma ecuación, hallar la ecuación cuyas raíces son $\alpha^2 + \beta^2$; $\alpha^2 + \gamma^2$; $\beta^2 + \gamma^2$.

14. Formar la ecuación con raíces $\alpha\beta$; $\alpha\gamma$; $\beta\gamma$ para la ecuación cúbica general.

15. Si α, β, γ son las raíces de $x^3 - x + 1 = 0$, formar la ecuación con raíces

$$\alpha(\beta - \gamma)^2 \ ; \ \beta(\alpha - \gamma)^2 \ ; \ \gamma(\alpha - \beta)^2.$$

* 16. Si

$$D_n = \Sigma\, \alpha^{n-1} \beta^{n-1} (\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)$$

$$E_n = \Sigma\, \alpha^{n-1} \beta^{n-1} (\alpha - \beta)^2$$

demostrar que

$$D_n = S_{n-1} S_{n+2} - S_n S_{n+1} \ ; \ E_n = S_{n+1} S_{n-1} - S_n^2.$$

Por lo tanto, si α y β tienen mayores módulos que las demás raíces de una ecuación

$$\alpha + \beta = \text{lím} \frac{D_n}{E_n} \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty;$$

y

$$\alpha\beta = \text{lím} \frac{E_{n+1}}{E_n} \text{ cuando } n \longrightarrow \infty;$$

y para n suficientemente grande tenemos aproximadamente

$$\alpha + \beta = \frac{D_n}{E_n} \qquad \alpha\beta = \frac{E_{n+1}}{E_n}$$

Calcular aproximadamente por este método las dos raíces mayores de la ecuación

$$(a) \quad x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Calcular también aproximadamente las raíces complejas de la ecuación

$$(b) \quad x^3 + 6x^2 + 10x - 1 = 0.$$

17. Demostrar que las funciones racionales simétricas del tipo

$$\Sigma \frac{1}{x_1 - a} = \frac{1}{x_1 - a} + \frac{1}{x_2 - a} + \dots + \frac{1}{x_n - a},$$

pueden expresarse en función de los coeficientes del polinomio $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots$ $\ldots (x - x_n)$ en la forma siguiente:

$$\Sigma \frac{1}{x_1 - a} = -\frac{f'(a)}{f(a)}.$$

18. Si una función racional $R(x)$ se descompone en fracciones simples:

$$R(x) = E(x) + \frac{A}{x - l} + \frac{B}{x - m} + \frac{C}{x - n} + \ldots$$

la función racional simétrica del tipo

$$\Sigma R(x_1) = R(x_1) + R(x_2) + \ldots + R(x_n),$$

puede expresarse en función de los coeficientes de $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ de la siguiente manera:

$$\Sigma R(x_1) = \Sigma E(x_1) - A\frac{f'(l)}{f(l)} - B\frac{f'(m)}{f(m)} - C\frac{f'(n)}{f(n)} - \ldots$$

y $\Sigma E(x_1)$, por ser $E(x)$ un polinomio, puede expresarse en función de $s_1, s_2, s_3, \ldots$

Las letras α, β, γ en los problemas siguientes, indican raíces de una ecuación cúbica que se especifica en cada problema. Calcular las funciones simétricas:

19. $\Sigma \frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$ para $x^3 - 3x + 1 = 0$.

20. $\Sigma \frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ para $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

21. $\Sigma \frac{(\beta + \gamma)^2}{\alpha}$ para $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$.

22. $\Sigma \frac{\alpha^2}{\beta^2 + \gamma^2}$ para $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$.

23. $\Sigma \frac{(\alpha - \beta)^2}{(\alpha + \beta)^2}$ para $2x^3 - 2x - 1 = 0$.

24. $\Sigma \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}$ para $2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$.

25. $\Sigma \frac{\alpha^2 + \beta\gamma}{\beta + \gamma}$ para $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

26. $\Sigma \frac{\alpha}{(\beta - \gamma)^2}$ para $x^3 - 1 = 0$.

5. **La solución de Lagrange de las ecuaciones cúbicas.** — La solución algebraica de las ecuaciones cúbicas y cuárticas en la forma presentada en el Capítulo V, aunque basada en las consideraciones más elementales, deja la impresión de una demostración efectuada con el

empleo de ingeniosos artificios cuya razón no es clara. Como en otros casos, es necesario observar el problema desde un punto de vista superior para entender por qué es posible una solución algebraica para las ecuaciones cúbicas y cuárticas. Y no sólo eso: los mismos principios, correctamente generalizados y sujetos a un examen más profundo mostrarán la razón por la cual generalmente es imposible hallar una solución algebraica para ecuaciones de grado mayor que 4.

Consideremos primero una función racional entera en tres variables x_1, x_2, x_3. Si se permutan de las seis maneras posibles, la función, en general, adquirirá seis valores distintos. En casos particulares puede suceder, sin embargo, que el número de valores distintos sea menor de seis, y entonces será uno (para funciones simétricas) o dos o tres. Lagrange demostró que es posible hallar una función cuyo cubo tenga sólo dos valores diferentes.

Sea ω una raíz cúbica imaginaria de la unidad y considérese la función lineal

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 .$$

Para toda permutación par de los índices 123, 231, 312 corresponden tres valores de esta función:

$$y_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 \quad ; \quad y_2 = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 \quad ; \quad y_3 = x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 ;$$

y para toda permutación impar 132, 213, 321 corresponden tres más:

$$y_4 = x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2 \quad ; \quad y_5 = x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3 \quad ; \quad y_6 = x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1 .$$

Nótese que

$$y_2 = \omega^2 y_1 \quad ; \quad y_3 = \omega y_1 \quad ; \quad y_5 = \omega y_4 \quad ; \quad y_6 = \omega^2 y_4 ;$$

de modo que

$$y_1^3 = y_2^3 = y_3^3 \quad ; \quad y_4^3 = y_5^3 = y_6^3 .$$

Por lo tanto:

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 ,$$

tiene sólo dos valores distintos:

$$t_1 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) \quad ; \quad t_2 = (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3 ,$$

y las combinaciones $t_1 + t_2$; $t_1 t_2$ son funciones simétricas de x_1, x_2, x_3.

Suponiendo que x_1, x_2, x_3 son las raíces de una ecuación cúbica

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 ,$$

se halló (ver Ejemplos 2 y 3 en el Párrafo 4) que

$$t_1 + t_2 = -2 p^3 + 9 pq - 27 r$$
$$t_1 t_2 = (p^2 - 3 q)^3 .$$

En consecuencia, t_1 y t_2 son las raíces de la ecuación cuadrática

$$t^2 + (2\,p^3 - 9\,pq + 27\,r)\,t + (p^2 - 3\,q)^3 = 0\,,$$

y pueden ser hallados algebraicamente. Habiendo encontrado t_1 y t_2, extrayendo raíces cúbicas, obtenemos:

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = \sqrt[3]{t_1} \quad ; \quad x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = \sqrt[3]{t_2}$$

y además, tenemos la tercera ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p\,.$$

Basta resolver estas ecuaciones para obtener las raíces

$$x_1 = \frac{1}{3}(-p + \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}) \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{3}(-p + \omega^2\sqrt[3]{t_1} + \omega\sqrt[3]{t_2})$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(-p + \omega\sqrt[3]{t_1} + \omega^2\sqrt[3]{t_2})$$

de la ecuación cúbica. Nótese que entre las raíces cúbicas existe la relación (Ejemplo 2, Párrafo 4)

$$\sqrt[3]{t_1}\,.\,\sqrt[3]{t_2} = p^2 - 3\,q\,.$$

6. **Solución de Lagrange de la ecuación cuártica.** — La posibilidad de resolución algebraica de ecuaciones cuárticas depende de la existencia de funciones de cuatro variables que toman sólo tres valores distintos al permutar estas variables en las 24 formas posibles. Una función de este tipo es

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2\,,$$

que tiene sólo tres valores distintos:

$$\theta_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \quad ; \quad \theta_2 = (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2\,;$$

$$\theta_3 = (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2\,,$$

cuyas combinaciones simétricas

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad ; \quad \theta_1\,\theta_2 + \theta_1\,\theta_3 + \theta_2\,\theta_3 \quad ; \quad \theta_1\,\theta_2\,\theta_3\,,$$

han sido estudiadas en los Ejemplos 1, 4 y 5 en el Párrafo 4. En función de los coeficientes de la ecuación

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0\,,$$

con raíces x_1, x_2, x_3, x_4, estas combinaciones son expresadas de la siguiente manera:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 3\,p^2 - 8\,q,$$

$$\theta_1\,\theta_2 + \theta_1\,\theta_3 + \theta_2\,\theta_3 = 3\,p^4 - 16\,p^2\,q + 16\,pr + 16\,q^2 - 64\,s,$$

$$\theta_1\,\theta_2 . \theta_3 = (p^3 - 4\,pq + 8\,r)^2.$$

Por lo tanto, θ_1, θ_2, θ_3 son las raíces de la resolvente cúbica

$$\theta^3 - (3\,p^2 - 8\,q)\,\theta^2 + (3\,p^4 - 16\,p^2\,q + 16\,pr + 16\,q^2 - 64\,s)\,\theta - \\ - (p^3 - 4\,pq + 8\,r)^2 = 0;$$

y θ_1, θ_2, θ_3 pueden hallarse resolviendo esta ecuación. Una vez halladas θ_1, θ_2, θ_3, podemos determinar las raíces x_1, x_2, x_3, x_4 por medio de las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -p, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= \sqrt{\theta_1}, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= \sqrt{\theta_2}, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= \sqrt{\theta_3}, \end{aligned}$$

en consecuencia:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}}{4} \quad ; \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_3}}{4}$$

$$x_3 = \frac{-p - \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta_3}}{4} \quad ; \quad x_4 = \frac{-p - \sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}}{4}$$

Nótese que las raíces cuadradas $\sqrt{\theta_1}$, $\sqrt{\theta_2}$, $\sqrt{\theta_3}$ no son independientes; entre ellas existe la relación (ver Ejemplo 1, Párrafo 4)

$$\sqrt{\theta_1}\,\sqrt{\theta_2}\,\sqrt{\theta_3} = -p + 4\,pq - 8\,r.$$

★ 7. **El principio de Gauss.** — Para ciertas investigaciones teóricas es de importancia la siguiente proposición:

Un polinomio que no se anula idénticamente, en las variables $f_1, f_2, \ldots, f_n$ no puede anularse idénticamente en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ luego de reemplazar $f_1, f_2, \ldots, f_n$ por las funciones elementales simétricas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Para demostrar esta proposición nótese que el polinomio en cuestión consiste de términos de la forma

$$A f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n},$$

donde $A \neq 0$ y los exponentes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son enteros no negativos.

Entre estos términos elegimos aquéllos en que las sumas de los exponentes

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \quad ; \quad \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n \quad ; \quad \alpha_3 + \ldots + \alpha_n \ ;$$
$$\ldots ; \alpha_{n-1} + \alpha_n \quad ; \quad \alpha_n ,$$

tienen los mayores valores posibles. Tal término es único. Porque si hubiera otros términos

$$Bf_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \ldots f_n^{\beta_n} ,$$

que satisficieran las mismas condiciones, con respecto a los exponentes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, tendríamos

$$\beta_n = \alpha_n \quad ; \quad \beta_{n-1} + \beta_n = \alpha_{n-1} + \alpha_n ; \ldots ;$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n ;$$

esto es:

$$\beta_n = \alpha_n \quad ; \quad \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} \quad ; \ \ldots ; \beta_1 = \alpha_1 ,$$

lo cual es imposible puesto que un polinomio se escribe siempre de manera que los monomios semejantes están sumados.

Para ilustrar lo que hemos dicho con un ejemplo, consideremos el polinomio

$$2 f_1^3 f_2^3 - f_1^5 f_2^2 f_3^2 + 5 f_1^4 f_2^2 f_3^2 f_4 - 7 f_1^7 f_2 + f_1^3 f_2^3 f_3 f_4 .$$

Las sumas de los exponentes para los términos tal como están escritos son

$$9, 3, 0, 0 \quad ; \quad 9, 4, 2, 0 \quad ; \quad 9, 5, 3, 1 \quad ; \quad 8, 1, 0, 0 \quad ; \quad 8, 5, 2, 1 .$$

El único término para el cual todas estas sumas son las mayores es el término

$$5 f_1^4 f_2^2 f_3^2 f_4 .$$

En el único término

$$Af_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n} ,$$

así elegido, reemplacemos $f_1, f_2, \ldots, f_n$ por las funciones simétricas elementales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f_1 = x_1 + x_2 + \ldots ; f_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots ; \ldots ; f_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

y desarrollemos. El desarrollo contendrá el término

$$A x_1^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} x_2^{\alpha_2+\ldots\alpha_n} \ldots x_n^{\alpha_n} ,$$

que no puede simplificarse con ninguno de los demás términos resultantes del desarrollo de

$$Af_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$$

o del desarrollo de cualquier otro término

$$Bf_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \dots f_n^{\beta_n},$$

que pueda encontrarse en el polinomio. El hecho de que, luego de reemplazar $f_1, f_2, \dots, f_n$ por las funciones elementales simétricas y efectuar el desarrollo, exista un término que no puede ser simplificado con otros términos, demuestra la proposición. De esta proposición pueden deducirse dos conclusiones. En primer lugar, *que una función simétrica de $x_1, x_2, \dots, x_n$ puede representarse como un polinomio en las funciones elementales simétricas, sólo de una manera.* Porque, si existieran dos representaciones así, habría un polinomio que no se anularía idénticamente en $f_1, f_2, \dots, f_n$, el cual, luego de reemplazar $f_1, f_2, \dots, f_n$ por las funciones elementales simétricas y desarrollar, se convertiría en un polinomio que se anularía idénticamente en $x_1, x_2, \dots, x_n$, lo cual es imposible. En segundo lugar, *el polinomio en las funciones elementales simétricas que representa un polinomio simétrico, es de igual grado que la mayor potencia de x_1 que aparezca en ese polinomio simétrico.* Por lo tanto, si r es el mayor exponente de x_1 que aparece en la función simétrica ϕ, y las funciones elementales simétricas se representan por:

$$f_1 = -\frac{a_1}{a_0} \quad ; \quad f_2 = \frac{a_2}{a_0}\ ; \ \dots\ ; f_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

entonces:

$$a_0^r\, \phi\,,$$

puede expresarse como un polinomio homogéneo en $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ de grado r. ★

CAPITULO XII

ELIMINACION

RESULTANTE Y DISCRIMINANTES

1. **Ejemplo de eliminación.** — Se propone resolver simultáneamente

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad ; \quad x^3 + y^3 - 1 = 0 \; ;$$

es decir, encontrar aquellos pares de números x, y que satisfacen ambas ecuaciones. Para resolver este problema podemos buscar de eliminar una de las incógnitas, digamos la x. Con este fin, despéjese en la primera ecuación x^2:

$$x^2 = -(y^2 - 1) \, ,$$

multiplíquense ambos miembros por x, lo que da:

$$x^3 = -x\,(y^2 - 1) \, .$$

Por otra parte, el valor de x^3 despejado en la segunda ecuación es:

$$x^3 = -(y^3 - 1) \, ,$$

y al igualar ambas expresiones, obtenemos

$$x\,(y^2 - 1) = y^3 - 1 \, .$$

Elevando al cuadrado y reemplazando nuevamente x^2 por $-(y^2 - 1)$ obtenemos:

$$(y^2 - 1)^3 + (y^3 - 1)^2 = 0 \, , \tag{1}$$

como una condición necesaria que debe satisfacer y de manera que las ecuaciones propuestas puedan tener soluciones. Pero esta condición también es suficiente, es decir, si tomamos como y cualquier raíz de [1], que es de sexto grado, es posible satisfacer las ecuaciones propuestas con un mismo valor de x.

Las ecuaciones originales son totalmente equivalentes a las ecuaciones

$$x^2 = -(y^2 - 1) \quad ; \quad x\,(y^2 - 1) = y^3 - 1 \, .$$

Ahora, si $y^2 - 1 = 0$, se sigue de [1] que $y^3 - 1 = 0$, y entonces la segunda ecuación se satisface cualquiera sea el valor de x, y la primera da $x = 0$. Si $y^2 - 1 \neq 0$ entonces

$$x = \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1}$$

y

$$x^2 = \frac{(y^3 - 1)^2}{(y^2 - 1)^2} = -(y^2 - 1),$$

por la condición [1].

Se puede intentar eliminar x de una forma diferente. Tómese la ecuación ya obtenida:

$$x(y^2 - 1) = y^3 - 1,$$

elévense al cubo ambos miembros y reemplácese x^3 por $-(y^3 - 1)$; entonces se tiene

$$(y^3 - 1)[(y^3 - 1)^2 + (y^2 - 1)^3] = 0,$$

como una consecuencia necesaria de las ecuaciones propuestas. Pero esta ecuación en y debido al factor $y^3 - 1$ se satisface para valores de y para los cuales las ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad ; \quad x^3 + y^3 - 1 = 0,$$

no tienen raíces x comunes. En efecto, si tomamos $y = \omega$, siendo ω una raíz cúbica imaginaria de la unidad, entonces $y^3 - 1 = 0$ y de la segunda ecuación se deduce que $x = 0$, mientras que para $x = 0$

$$x^2 + y^2 - 1 = \omega^2 - 1 \neq 0.$$

Este ejemplo demuestra que al desarrollar el proceso de eliminación se debe proceder con gran cautela para evitar la introducción de factores extraños, como $y^3 - 1$ en nuestro caso. Para llevar a cabo correctamente la eliminación sin el riesgo de introducir factores extraños, el camino más natural que se presenta es el siguiente: Para una y dada la ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

tiene raíces x_1 y x_2. Para este valor dado de y, supongamos que una de las raíces satisface también la ecuación

$$x^3 + y^3 - 1 = 0;$$

entonces

$$(x_1^3 + y^3 - 1)(x_2^3 + y^3 - 1) = 0. \qquad [2]$$

Recíprocamente, si esta condición se satisface, entonces uno de los factores es cero, digamos

$$x_1^3 + y^3 - 1 = 0,$$

y por lo tanto las ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad ; \quad x^3 + y^3 - 1 = 0,$$

tienen una raíz común $x = x_1$. Desarrollando el producto del segundo miembro de [2], tenemos:

$$x_1^3 x_2^3 + (x_1^3 + x_2^3)(y^3 - 1) + (y^3 - 1)^2 = 0.$$

Pero

$$x_1 x_2 = y^2 - 1 \quad ; \quad x_1 + x_2 = 0 \quad ; \quad x_1^3 + x_2^3 = 0,$$

y entonces

$$(y^2 - 1)^3 + (y^3 - 1)^2 = 0,$$

representa la condición necesaria y suficiente que debe satisfacer y de manera que las dos ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad ; \quad x^3 + y^3 - 1 = 0,$$

puedan tener una raíz común x.

2. **Resultante.** — El procedimiento que se acaba de usar es completamente general. Sean

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$
$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0,$$

dos ecuaciones cuyos coeficientes pueden involucrar otra variable y. Con el fin de obtener la condición necesaria y suficiente para la existencia de una raíz común a ambas, designemos por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ las raíces de $f(x) = 0$, suponiendo $a_0 \neq 0$. Si una de éstas es también raíz de la ecuación $g(x) = 0$, entonces

$$g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n) = 0.$$

Recíprocamente, si esta condición se satisface, uno de los factores es cero, digamos $g(\alpha_1) = 0$. Entonces, α_1 es una raíz común a ambas ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ El producto

$$g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n) = 0,$$

es una función simétrica de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, y la máxima potencia de α_1 que aparece en él es indudablemente α_1^m. De acuerdo con la observación final del Capítulo XI, Párrafo 7:

$$a_0^m\, g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n),$$

es un polinomio homogéneo de grado m en los coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ y también, lo que es evidente, un polinomio homogéneo de grado n en los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n$ de $g(x)$. Este polinomio se llama *resultante* de $f(x)$ y $g(x)$ (en este orden) y se designa por $R(f; g)$ de manera que

$$R(f; g) = a_0^m g(\alpha_1) g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n).$$

La anulación de la resultante $R(f; g)$ es, por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones $f = 0$; $g = 0$ tengan una raíz común, supuesto $a_0 \neq 0$. Si $b_0 \neq 0$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ son raíces de la ecuación $g(x) = 0$ la resultante $R(g; f)$ es

$$R(g; f) = b_0^n f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_m),$$

y su anulación es nuevamente la condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones $f = 0$ y $g = 0$ tengan una raíz común.

Existe una relación simple entre las dos resultantes $R(f; g)$ y $R(g; f)$. Tomando en consideración el factoreo

$$g(x) = b_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_m),$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} R(f; g) = a_0^m b_0^n & (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2) \ldots (\alpha_1 - \beta_m) \\ & (\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) \ldots (\alpha_2 - \beta_m) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\alpha_n - \beta_1)(\alpha_n - \beta_2) \ldots (\alpha_n - \beta_m). \end{aligned}$$

Intercambiando las letras α y β y reordenando los factores tenemos también

$$\begin{aligned} R(f; g) = (-1)^{mn} a_0^m b_0^n & (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2) \ldots (\beta_1 - \alpha_n) \\ & (\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \ldots (\beta_2 - \alpha_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\beta_m - \alpha_1)(\beta_m - \alpha_2) \ldots (\beta_m - \alpha_n). \end{aligned}$$

Aquí el segundo miembro, exceptuado el factor $(-1)^{mn}$, es $R(g; f)$ y por lo tanto

$$R(g; f) = (-1)^{mn} R(f; g).$$

De esta relación podemos concluir que la anulación de $R(f; g)$ es la condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones $f = 0$ y $g = 0$ tengan una raíz común, siempre que no sean al mismo tiempo $a_0 = 0$ y $b_0 = 0$. Pues con $a_0 = 0$, por hipótesis $b_0 \neq 0$ y desde que $R(f; g) = 0$ implica $R(g; f) = 0$, se sigue que $f = 0$ y $g = 0$ tienen una raíz común.

Ejemplo 1. Encontrar la resultante de

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \quad ; \quad g(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2.$$

Por definición

$$R(f; g) = a_0^2 (b_0 \alpha_1^2 + b_1 \alpha_1 + b_2)(b_0 \alpha_2^2 + b_1 \alpha_2 + b_2) =$$
$$= a_0^2 \left[b_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + b_0 b_1 (\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_2) + b_0 b_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + b_1^2 \alpha_1 \alpha_2 + \right.$$
$$\left. + b_1 b_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + b_2^2\right].$$

Por otra parte:

$$a_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 = a_2^2 \quad ; \quad a_0^2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) = -a_1 a_2 \quad ; \quad a_0^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = a_1^2 - 2 a_0 a_2 \; ;$$
$$a_0^2 \alpha_1 \alpha_2 = a_0 a_2 \quad ; \quad a_0^2 (\alpha_1 + \alpha_2) = -a_0 a_1$$

y por lo tanto:

$$R(f; g) = a_2^2 b_0^2 + a_0^2 b_2^2 - 2 a_0 a_2 b_0 b_2 - a_0 a_1 b_1 b_2 - a_1 a_2 b_0 b_1 + a_1^2 b_0 b_2 + a_0 a_2 b_1^2$$

Esto puede presentarse de una forma más elegante, así:

$$R(f; g) = (a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Ejemplo 2. Resolver las ecuaciones

$$x^3 + 2 x^2 y + 2 y (y - 2) x + y^2 - 4 = 0 \quad ; \quad x^2 + 2 xy + 2 y^2 - 5 y + 2 = 0.$$

Es conveniente ordenar estas ecuaciones en potencias de y, desde que y aparece solamente elevada a la segunda potencia en ambas. De las ecuaciones así ordenadas

$$(2 x + 1) y^2 + (2 x^2 - 4 x) y + x^3 - 4 = 0$$
$$2 y^2 + (2 x - 5) y + x^2 + 2 = 0$$

elimínese y formando su resultante de acuerdo con la fórmula del Ejemplo 1:

$$R = x^4 + 13 x^3 + 56 x^2 + 80 x = x (x + 4)^2 (x + 5).$$

Los valores $x = 0; -4; -5$ son los únicos para los cuales las ecuaciones tienen raíces y comunes; esta raíz puede encontrarse por el método para determinar el máximo común divisor. Así, correspondiendo a $x = 0$ se determina $y = 2$. En correspondencia con $x = -4; -5$, se encuentra, respectivamente, que $y = 2$ e $y = 3$. Todos los pares de valores $x; y$ que satisfacen las ecuaciones propuestas son:

$$x = 0 \quad ; \quad y = 2$$
$$x = -4 \quad ; \quad y = 2$$
$$x = -5 \quad ; \quad y = 3.$$

Problemas

Resuélvanse los siguientes sistemas:

1. $x^2 - xy + y^2 = 1,$
   $x^2 + xy - 3 y^2 - 2 x + 2 y = -1.$

2. $3 x^2 + 3 y^2 - 8 xy + 2 x + 2 y - 2 = 0,$
   $xy + x - y + 1 = 0.$

3. $3x^2 + 3y^2 - 8xy + 2x + 2y - 2 = 0,$
$xy + x + y - 1 = 0.$

4. $(y-1)x^2 + xy + y^2 - 2y = 0,$
$(y-1)x + y = 0.$

5. $(y-1)x^2 + 2x - 5y + 3 = 0,$
$x^2 y + 9x - 10y = 0.$

6. $(y-2)x^2 - 2x + 5y - 2 = 0,$
$yx^2 - 5x + 4y = 0.$

7. $(y-1)x^3 + y(y+1)x^2 + (3y^2 + y - 2)x + 2y = 0,$
$(y-1)x^2 + y(y+1)x + 3y^2 - 1 = 0.$

8. $x^2 + y^2 = 1,$
$x^3 + y^3 = 0.$

9. Elimínese x entre $f(x) = 0$ e $y = x^2$. La resultante es

$$F(y) = f(\sqrt{y})\, f(-\sqrt{y})$$

Por lo tanto, formúlese la regla para la formación de la ecuación cuyas raíces son los cuadrados de las raíces de $f(x) = 0$. Aplíquese la regla al caso particular

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x + 1 = 0\,.$$

10. Para encontrar la ecuación cuyas raíces son los cubos de las raíces de $f(x) = 0$ es suficiente eliminar x entre $f(x) = 0$ e $y = x^3$. Demostrar que la ecuación buscada es

$$f(\sqrt[3]{y})\, f(\omega\sqrt[3]{y})\, f(\omega^2\sqrt[3]{y}) = 0\,,$$

siendo ω la raíz cúbica imaginaria de la unidad. Aplíquese este método al ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0\,.$$

11. De la definición de la resultante demuéstrese que

$$a_0^{m-\mu} R(f; g + \lambda f) = R(f; g)\,,$$

para un polinomio arbitrario λ, siendo μ el grado de $g + \lambda f$. Combinando esta propiedad con la identidad

$$R(f; g) = (-1)^{mn} R(g; f),$$

establecida en el texto, demuéstrese cómo puede calcularse la resultante mediante el proceso utilizado para hallar el máximo común divisor. Aplíquese este método a los ejemplos:

(a) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \;\; ; \;\; g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$

(b) $f(x) = x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y \;\; ; \;\; g(x) = x^2 + 2xy + y^2 - y$

12. Demostrar que

$$R(f; gg_1) = R(f; g)\, R(f; g_1)\,.$$

3. **El determinante de Sylvester.** — La resultante de dos polinomios puede presentarse en la forma de un determinante siguiendo un elegante método de eliminación propuesto por Sylvester. Si dos ecuaciones

$f = 0$ y $g = 0$ tienen una raíz común, los polinomios f y g tienen un divisor común que no es una constante. Por lo tanto, es natural plantearse la pregunta: ¿cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos polinomios

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$
$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

uno de grado n (de manera que $a_0 \neq 0$) y otro no idénticamente nulo de grado no superior a m, tengan un divisor común que no sea una constante?. Una respuesta preliminar se da en el siguiente

LEMA: *Dos polinomios f y g tienen un divisor común que involucra a x si, y solamente si, existen dos polinomios f_1 y g_1 de grados no mayores que $n-1$ y $m-1$ respectivamente y no idénticamente nulos, de manera que se cumpla la identidad*

$$fg_1 + f_1 g = 0 .$$

DEMOSTRACION. — (*a*) Supongamos que f y g tienen un divisor común de grado > 0. Entonces:

$$f_1 = \frac{f}{d} \quad ; \quad g_1 = \frac{g}{d} ,$$

son dos polinomios de grados no mayores que $n-1$ y $m-1$, no idénticamente nulos y tales que

$$fg_1 + f_1 g = 0 .$$

(*b*) Supongamos que dos polinomios como los requeridos por el lema existan. Entonces, el máximo común divisor de f y g no puede ser una constante. Pues suponiendo que sea una constante, el máximo común divisor de

$$f_1 g \text{ y } f_1 f$$

es f_1. Pero

$$f_1 g = -fg_1 \quad \text{y} \quad f_1 f ,$$

son ambos divisibles por f. Luego, f_1 es divisible por f, lo que es imposible desde que el grado de f_1 es menor que el de f. Esta contradicción demuestra que f y g tienen un divisor común que no es una constante. Supóngase ahora que

$$f_1 = \lambda_0 x^{n-1} + \lambda_1 x^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1},$$
$$g_1 = \mu_0 x^{m-1} + \mu_1 x^{m-2} + \ldots + \mu_{m-1} ,$$

y trátese de encontrar $m + n$ constantes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}; \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$, no todas cero, tal que idénticamente

$$fg_1 + f_1 g = 0.$$

Esto da $m + n$ ecuaciones lineales homogéneas para determinar λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$; $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$, teniendo estas ecuaciones una solución trivial si y sólo si su determinante se anula. No puede suceder que todos los $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ o todos los $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ se anulen.

Supóngase, por ejemplo, que $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{m-1} = 0$; entonces, no todos los $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ se anulan. Desde que $f_1 = 0$ idénticamente, se sigue que

$$fg_1 = 0,$$

y esto es imposible desde que ni f ni g_1 se anulan idénticamente. De acuerdo con el lema, se puede inferir que la anulación del determinante del sistema que sirve para determinar los coeficientes de f_1 y g_1, siendo f_1 y g_1 polinomios no idénticamente nulos que satisfacen la identidad

$$fg_1 + f_1 g = 0,$$

es la condición necesaria y suficiente para que f y g tengan un máximo común divisor de grado > 0. Llamaremos a este determinante el determinante de Sylvester y lo indicaremos con $D(f; g)$.

Para tener una idea clara de cómo se construye este determinante tomemos el ejemplo:

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \\ g &= b_0 x^2 + b_1 x + b_2. \end{aligned}$$

Escríbanse las identidades

$$\begin{aligned} xf(x) &= a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x \\ f(x) &= \phantom{a_0 x^4 + {}} a_0 x^3 + a_1 x + a_2 x + a_3 \\ x^2 g(x) &= b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 \\ xg(x) &= \phantom{b_0 x^4 + {}} b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x \\ g(x) &= \phantom{b_0 x^4 + b_1 x^3 + {}} b_0 x^2 + b_1 x + b_2; \end{aligned}$$

y multiplíqueselas por μ_0, μ_1, λ_0, λ_1, λ_2 respectivamente. Súmense e iguálense a cero los coeficientes de x^4, x^3, x^2, x, 1 en el segundo miembro. Esto da el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_0 \mu_0 + 0\ \mu_1 + b_0 \lambda_0 \phantom{{}+ b_1 \lambda_1 + b_0 \lambda_2} &= 0, \\ a_1 \mu_0 + a_0 \mu_1 + b_1 \lambda_0 + b_0 \lambda_1 \phantom{{}+ b_0 \lambda_2} &= 0, \\ a_2 \mu_0 + a_1 \mu_1 + b_2 \lambda_0 + b_1 \lambda_1 + b_0 \lambda_2 &= 0, \\ a_3 \mu_0 + a_2 \mu_1 + 0\ \lambda_0 + b_2 \lambda_1 + b_1 \lambda_2 &= 0, \\ 0\ \mu_0 + a_3 \mu_1 + 0\ \lambda_0 + 0\ \lambda_1 + b_2 \lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

cuyo determinante es:

$$D(f;g) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & b_2 \end{vmatrix},$$

o bien, cambiando filas por columnas:

$$D(f;g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Este es el determinante de Sylvester en el caso $n = 3$, $m = 2$. Es evidente que en el caso general:

$$D(f;g) = \left|\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_n & & & \\ & a_0 & a_1 \ldots & a_n & & \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ & & & a_0 & a_1 \ldots\ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_m & & & \\ & b_0 & b_1 \ldots & b_m & & \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ & & & b_0 & b_1 \ldots\ldots & b_m \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ filas} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ filas} \end{array}$$

En este determinante los espacios dejados en blanco por conveniencias tipográficas deben llenarse con ceros. Por ejemplo: si $n = 4$, $m = 3$

$$D(f;g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Problemas

Resolver los siguientes sistemas:

1. $x^3 + 3yx^2 + (3y^2 - y + 1)x + y^3 - y^2 + 2y = 0,$
$x^2 + 2yx + y^2 - y = 0.$

2. $x^3 + 2\,yx^2 + 2\,y\,(y-2)\,x + y^2 - 4 = 0,$
$x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 - 5\,y + 2 = 0.$

3. $x^3 + 3\,yx^2 - 3\,x^2 + 3\,y^2 x - 6\,xy - x + y^3 - 3\,y^2 - y + 3 = 0,$
$x^3 - 3\,yx^2 + 3\,x^2 + 3\,y^2 x - 6\,xy - x - y^3 + 3\,y^2 + y - 3 = 0.$

4. $x^3 + yx^2 - (y^2+1)\,x + y - y^3 = 0,$
$x^3 - yx^2 - (y^2 + 6\,y + 9)\,x + y^3 + 6\,y^2 + 9\,y = 0.$

5. $yx^3 - (y^3 - 3\,y - 1)\,x + y = 0,$
$x^2 - y^2 + 3 = 0.$

6. $5\,x^2 - 5\,y^2 - 3\,x + 9\,y = 0,$
$5\,x^3 + 5\,y^3 - 15\,x^2 - 13\,xy - y^2 = 0.$

7. $3\,x^3 + 9\,x^2 y + 9\,xy^2 + 3\,y^3 + 2\,x^2 - 4\,xy + 2\,y^2 = 5,$
$4\,x^3 + 12\,x^2 y + 12\,xy^2 + 4\,y^3 - x^2 + 2\,xy - y^2 = 3.$

8. $x^3 + yx^2 - 4 = 0,$
$x^3 + yx + 2 = 0.$

9. $x^3 + 4\,yx^2 - 3\,x + 2 = 0,$
$2\,x^3 + (y+2)\,x^2 - 5\,x + 1 = 0.$

10. Hallar λ y μ de modo que las ecuaciones

$$x^3 - 6\,x^2 + \lambda\,x - 3 = 0,$$
$$x^3 - x^2 + \mu x + 2 = 0.$$

tengan dos raíces comunes.

4. **Identidad de la resultante y del determinante de Sylvester.** — La anulación del determinante de Sylvester $D\,(f;g)$ es una condición necesaria y suficiente para que f y g tengan un máximo común divisor de grado > 0, supuesto $a_0 \neq 0$. La anulación de la resultante $R\,(f;g)$ también es una condición necesaria y suficiente para lo mismo. Esto nos conduce a sospechar la estrecha relación que existe entre ambos. En efecto, el determinante de Sylvester y la resultante son polinomios idénticos en los coeficientes de f y g. Para no interrumpir la demostración de este hecho capital probaremos primero la siguiente proposición auxiliar: *Si $\theta\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ es un polinomio en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que es separadamente divisible por $g\,(x_1), g\,(x_2), \ldots, g\,(x_n)$, entonces es divisible por el producto $g\,(x_1), g\,(x_3), \ldots g\,(x_n)$ de manera que*

$$\theta\,(x_1; x_2; \ldots; x_n) = g\,(x_1)\,g\,(x_2)\,\ldots\,g\,(x_n)\,\Omega\,(x_1; x_2; \ldots; x_n),$$

donde $\Omega\,(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ es un polinomio en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para demostrar esta afirmación, supongamos que θ, siendo divisible por $g\,(x_1)\,g\,(x_2)\,\ldots$

$\ldots g(x_{i-1})$, es también divisible por $g(x_i)$, entonces demostraremos que θ es divisible por $g(x_1)$, $g(x_2) \ldots g(x)$. Por hipótesis:

$$\theta(x_1; x_2; \ldots; x_n) = g(x_1)\, g(x_2) \ldots g(x_{i-1})\, \theta_1(x_1; x_2, \ldots; x_n),$$

siendo θ_1 un polinomio en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ordénese θ_1 según las potencias de x_i y divídase por $g(x_i)$; entonces:

$$\theta_1 = g(x_i)\, \theta_2(x_1; x_2; \ldots; x_n) + p_0 x_i^{m-1} + p_1 x_i^{m-2} + \ldots + p_{m-1},$$

siendo $p_0, p_1, \ldots, p_{m-1}$ polinomios en $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Por lo tanto:

$$\theta = g(x_1)\, g(x_2) \ldots g(x_i)\, \theta_2 + P_0 x_i^{m-1} + P_1 x_i^{m-2} + \ldots + P_{m-1},$$

donde los polinomios

$$P_k = g(x_1)\, g(x_2) \ldots g(x_{i-1})\, p_k \quad ; \quad k = 0; 1; 2; \ldots; m-1,$$

no contienen a x_i. Desde que θ es divisible por $g(x_i)$:

$$P_0 x_i^{m-1} + P_1 x_i^{m-2} + \ldots + P_{m-1},$$

será divisible por $g(x_i)$ o sea

$$P_0 x_i^{m-1} + P_1 x_i^{m-2} + \ldots + P_{m-1} = g(x_i)\, T(x_1; x_2; \ldots; x_n).$$

Pero el segundo miembro, si no es idénticamente nulo, tiene al menos grado m en x_i; por lo tanto:

$$P_0 = P_1 = \ldots = P_{m-1} = 0,$$

son idénticamente nulos y la proposición está demostrada. Como θ es divisible por $g(x_1)$ y por $g(x_2)$, será divisible por $g(x_1)\, g(x_2)$ de acuerdo a lo que se acaba de demostrar; siendo θ divisible por $g(x_3)$ será divisible, por la misma razón, por $g(x_1)\, g(x_2)\, g(x_3)$, etc.

Para abreviar demostraremos la identidad de $D(f; g)$ y $R(f; g)$ en el caso particular de $n = 3$, $m = 2$, pero el razonamiento puede extenderse al caso general. Sean x_1, x_2, x_3, variables y

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Entonces el determinante de Sylvester

$$D(f; g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

es un polinomio en x_1, x_2, x_3. Multiplicando las columnas 1, 2, 3, 4 por x^4, x^3, x^2, x y sumándolas a la quinta columna, podemos escribir $D(f;g)$ así:

$$D(f;g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & x f(x) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & x^2 g(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & x g(x) \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & g(x) \end{vmatrix}.$$

Haciendo $x = x_1, x_2, x_3$ y teniendo en cuenta que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, vemos que $D(f;g)$ es divisible por $g(x_1)$, $g(x_2)$, $g(x_3)$ y por lo tanto divisible por $g(x_1)\, g(x_2)\, g(x_3)$ de manera que

$$D(f;g) = g(x_1)\, g(x_2)\, g(x_3)\; T(x_1; x_2; x_3),$$

donde $T(x_1; x_2; x_3)$ es un polinomio en x_1, x_2, x_3. Escribiendo $D(f;g)$ así:

$$D(f;g) = a_3^2 \begin{vmatrix} \frac{a_0}{a_3} & \frac{a_1}{a_3} & \frac{a_2}{a_3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_0}{a_3} & \frac{a_1}{a_3} & \frac{a_2}{a_3} & 1 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

y observando que:

$$-\frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \quad ; \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} ;$$

$$-\frac{a_0}{a_3} = \frac{1}{x_1 x_2 x_3},$$

vemos que el determinante desarrollado contiene, aparte de un término constante, solamente términos que involucran x_1, x_2, x_3 en los denominadores. Por lo tanto, en el desarrollo de $D(f;g)$ el término de mayor grado en x_1, x_2, x_3 es de la forma

$$K\, x_1^2\, x_2^2\, x_3^2,$$

con K constante. Un término similar es el de grado máximo en x_1, x_2, x_3 en el producto

$$g(x_1)\, g(x_2)\, g(x_3),$$

de donde se puede concluir que $T(x_1, x_2, x_3)$ se reduce a una constante.

Llámese a esa constante C y para determinarla hágase $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ en ambos miembros de la identidad

$$D(f; g) = C\, g(x_1)\, g(x_2)\, g(x_3)\,.$$

Como $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ cuando $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tenemos:

$$D(f; g) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_0^2\, b_2^3.$$

Por otra parte:

$$g(0)\, g(0)\, g(0) = b_2^3$$

y así:

$$Cb_2^3 = a_0^2\, b_2^3$$

de donde, considerando b_0, b_1, b_2 como variables:

$$C = a_0^2$$

y

$$D(f; g) = a_0^2\, g(x_1)\, g(x_2)\, g(x_3) = R(f; g)\,.$$

Esta es una identidad en x_1, x_2, x_3; b_0, b_1, b_2 se consideran variables. Pero ambos miembros son funciones simétricas de x_1, x_2, x_3. Siendo idénticas seguirán siéndolo cuando se expresen como polinomios en a_0; a_1; a_2; a_3; b_0; b_1; b_2 de acuerdo al principio de Gauss demostrado en el Capítulo XI, Párrafo 7. Así, la identidad del determinante de Sylvester y de la resultante considerados como polinomios en los coeficientes de f y g queda demostrada.

5. **Discriminante.** — El producto de las $1/2\, n(n-1)$ diferencias $x_\alpha - x_\beta$ correspondientes a todas las posibles combinaciones de dos índices $\alpha < \beta$ tomados de entre n números 1, 2, 3, ..., n, a saber

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n) \ldots (x_{n-1} - x_n),$$

solamente cambia de signo con la transposición de dos letras cualesquiera x_α y x_β y, en consecuencia, por todas las permutaciones de ellas adquiere sólo dos valores. Su cuadrado es, por lo tanto, simétrico. Si ponemos

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n\,,$$

las funciones elementales simétricas son:

$$-\frac{a_1}{a_0}\;;\;\frac{a_2}{a_0}\,;\,\ldots\,;\,(-1)^n \frac{a_n}{a_0}\,.$$

Por lo tanto:

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \dots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \dots (x_2 - x_n)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2,$$

que involucra a $x_1; x_2; \dots; x_n$ simétricamente, puede expresarse como un polinomio en

$$\frac{a_1}{a_0} \;;\; \frac{a_2}{a_0} \;;\; \dots \;;\; \frac{a_n}{a_0} \,.$$

Siendo $2n - 2$ la mayor potencia de x_1 que se presenta en el producto anterior:

$$D = a_0^{2n-2} (x_1 - x_2)^2 \dots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \dots (x_2 - x_n)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2,$$

se un polinomio homogéneo de grado $2n - 2$ en $a_0, a_1, \dots, a_n$ y se llama *discriminante* de $f(x)$. Si $x_1; x_2; \dots, x_n$ no represntan variables sino raíces de la ecuación $f(x) = 0$, la misma expresión D se denomina discriminante de esa ecuación. Evidentemente el discriminante se anula si y solamente si la ecuación tiene raíces iguales. El discriminante tiene una íntima relación con la resultante de $f(x)$ y sus derivadas. Como

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= a_0 (x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n) \\ f'(x_2) &= a_0 (x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'(x_n) &= a_0 (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

es fácil ver que:

$$f_1'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n (x_1 - x_2)^2 \dots (x_1 - x_n)^2 \dots$$

$$\dots (x_{n-1} - x_n)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-n+2} D.$$

Por otra parte:

$$R(f; f') = a_0^{n-1} f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_n)$$

y así:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0 D = R(f; f').$$

La expresión explícita del discriminante se obtendrá escribiendo $R(f; f')$ como un determinante de Sylvester.

Ejemplo 1. Encontrar el discriminante de un polinomio cuadrático

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 .$$

La resultante de f y f' es:

$$R(f; f') = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

de donde

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 2 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - 4a_0a_2 .$$

Ejemplo 2. Encontrar el discriminante de un polinomio cúbico.

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 .$$

Aquí:

$$R(f;f') = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

de donde

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 3 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 \\ 3a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 3a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

Luego de desarrollar este determinante, se encuentra que la expresión final de D es:

$$D = 18\,a_0a_1a_2a_3 - 4\,a_1^3a_3 + a_1^2a_2^2 - 4\,a_0a_2^3 - 27\,a_0^2a_3^2.$$

En el caso de una ecuación con coeficientes numéricos el cálculo del discriminante puede ser reducido al cálculo de un determinante numérico del mismo orden que el grado de la ecuación. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, son las raíces de la ecuación entonces el cuadrado del determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \ldots \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = (\alpha_n - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \ldots (\alpha_2 - \alpha_1)$$

difiere de D solamente por el factor a_0^{2n-2}. Multiplicando ahora el determinante de Vandermonde por sí mismo, columna por columna, y llamando como de costumbre:

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + \ldots + \alpha_n^i,$$

las sumas de las potencias i-ésimas, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \ldots \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

y así

$$D = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Las sumas s_i se pueden calcular rápidamente por medio de las fórmulas de Newton.

6. **Raíces imaginarias.** — El cálculo de las raíces imaginarias puede ser reducido al de raíces reales por medio de la eliminación. Sea la ecuación propuesta

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

con coeficientes reales y sea $x = a + bi$ una de sus raíces imaginarias. Entonces, $f(a + bi) = 0$ y por la fórmula de Taylor

$$f(a + bi) = f(a) + bi \frac{f'(a)}{1} - b^2 \frac{f''(a)}{1.2} - i b^3 \frac{f'''(a)}{1.2.3} + \dots$$

Como el segundo miembro se anula por hipótesis, se anulan sus partes real e imaginaria separadamente, es decir:

$$f(a) - \frac{f''(a)}{1.2} b^2 + \frac{f^{IV}(a)}{1.2.3} b^4 - \dots = 0$$

$$f'(a) - \frac{f'''(a)}{1.2.3} b^2 + \frac{f^{V}(a)}{1.2.3.4.5} b^4 - \dots = 0,$$

ya que para una raíz imaginaria $b \neq 0$. Eliminando b^2 obtenemos una ecuación de grado $n(n-1)/2$ que debe ser satisfecha por la parte real de todas las raíces imaginarias. Las raíces reales de esta ecuación que llevan a valores positivos de b^2 pueden calcularse por uno de los métodos explicados en el Capítulo VIII. La ecuación auxiliar que sirve para determinar a es de grado 3, 6, 10, ... correspondiente a $n = 3, 4, 5, \dots$ Debido al elevado grado de esta ecuación y al trabajo que toma desarrollarla, este método de cálculo de las raíces imaginarias tiene sólo un valor teórico excepto para los grados inferiores $n = 3$ y $n = 4$. Es mucho mejor, para este propósito, el llamado método del cuadrado de la raíz o de Graeffe. Los lineamientos de este método pueden encontrarse en el Apéndice V.

Ejemplo. Sea la ecuación propuesta

$$f(x) = x^4 + 4x - 1 = 0.$$

El sistema de ecuaciones que sirve para determinar a y b en este caso es

$$b^4 - 6\,a^2\,b^2 + a^4 + 4\,a - 1 = 0\,,$$

$$ab^2 - a^3 - 1 = 0\,.$$

Evidentemente $a \neq 0$; luego:

$$b^2 = \frac{a^3 + 1}{a}\,.$$

que luego de sustituirlo en la primera ecuación da

$$4\,a^6 + a^2 - 1 = 0\,.$$

El único valor positivo de a^2 que satisface esta ecuación es

$$a^2 = \frac{1}{2}\,,$$

y, correspondientemente

$$a = \pm\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Debemos tomar

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

de manera de tener un valor positivo de b^2. Entonces:

$$b^2 = \frac{1 + \sqrt{8}}{2} \quad ; \quad b = \pm\,\frac{\sqrt{1 + \sqrt{8}}}{\sqrt{2}}$$

y las raíces imaginarias de nuestra ecuación son:

$$\frac{1 + i\sqrt{1 + \sqrt{8}}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{1 - i\sqrt{1 + \sqrt{8}}}{\sqrt{2}}\,.$$

Problemas

Hállense las raíces imaginarias de las siguientes ecuaciones:

1. $x^3 + x + 10 = 0$.

2. $x^3 - 2\,x - 2 = 0$.

3. $x^3 - 2\,x - 5 = 0$.

4. $x^4 + x^2 - 2\,x + 6 = 0$.

5. $x^4 - 2\,x^3 + 6\,x^2 - 2\,x + 5 = 0$.

6. $x^4 - 4\,x^2 + 8\,x - 4 = 0$.

7. $x^4 - x + 1 = 0$.

8. $x^4 - 2\,x^3 - 1 = 0$.

APENDICE I

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

1. — Se supuso en todo este libro que toda ecuación algebraica con coeficientes reales o imaginarios tiene, por lo menos, una raíz compleja. Esta afirmación es conocida como *teorema fundamental del álgebra*. La evidencia empírica de esta proposición, recogida de innumerables ejemplos particulares, es tan fuerte que por mucho tiempo fué considerada como algo evidente. El que primero estableció el hecho de la existencia de raíces como teorema fué D'Alembert en 1746 y trató de demostrarlo. De acuerdo al rigor que hoy se exige, la demostración de D'Alembert es defectuosa en muchos aspectos, pero contiene un buen germen y puede elaborarse con ella una demostración rigurosa. Por ejemplo, una de las demostraciones propuestas por Weierstrass está basada en la idea de D'Alembert. La primera demostración completa del teorema fundamental fué hecha por Gauss en el comienzo del siglo pasado, y desde entonces se han agregado muchas otras. Entre las muchas demostraciones existentes, probablemente la primera y la cuarta de Gauss (ésta es sólo otra presentación de la primera) muestran de la manera más clara por qué una ecuación debe tener una raíz; y aunque los partidarios del rigor extremo insisten en la necesidad de varios agregados, presentaremos aquí la cuarta demostración de Gauss como la que está más de acuerdo con los propósitos de este libro.

2. Los coeficientes del polinomio

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + l,$$

son números complejos. Sean éstos, escritos en forma trigonométrica,

$$a = A(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)\ ;\ b = B(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta), \dots,$$
$$l = L(\cos\lambda + i\operatorname{sen}\lambda).$$

Atribuímos también a x un valor complejo

$$x = r(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi).$$

Sustituyéndolo en $f(x)$ y separando las partes real e imaginaria con ayuda del teorema de De Moivre, podemos escribir

$$f(x) = T + iU$$

donde

$$T = r^n \cos n\,\phi + Ar^{n-1}\cos[(n-1)\,\phi + \alpha] + \ldots + L\cos\lambda\,,$$

$$U = r^n \operatorname{sen} n\,\phi + Ar^{n-1}\operatorname{sen}[(n-1)\,\phi + \alpha] + \ldots + L\operatorname{sen}\lambda\,.$$

El teorema fundamental quedará demostrado si podemos probar la existencia de un punto con coordenadas polares r y ϕ en el que T y U se anulen, y esto se conseguirá recurriendo a la intuición geométrica.

3. — Antes de entrar en la parte fundamental de la demostración deben hacerse algunas consideraciones preliminares. En primer lugar, es posible determinar un número R tal que para $r > R$

$$r^n - \sqrt{2}\,(Ar^{n-1} + Br^{n-2} + \ldots + L) > 0\,. \qquad [1]$$

Si C es un número positivo mayor que todos los números $A, B, \ldots, L$, la desigualdad [1] se cumplirá si

$$r^n - \sqrt{2}\,C\,(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + 1) > 0$$

ó

$$r^n\left[1 - \sqrt{2}\,C\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}\right)\right] > 0. \qquad [2]$$

Pero, suponiendo $r > 1$:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n} < \frac{1}{r-1}\,,$$

y en consecuencia, [2] y con mayor razón [1] serán válidos si $r > 1$ y

$$1 - \frac{\sqrt{2}\,C}{r-1} > 0\,,$$

esto es, si

$$r > 1 + \sqrt{2}\,C\,.$$

Basta tomar

$$R = 1 + \sqrt{2}\,C\,,$$

para que se cumpla la desigualdad [1] para $r > R$.

4. — En segundo lugar, es posible demostrar que la circunferencia de radio $r > R$ consiste de $2\,n$ arcos en los cuales T toma valores alternativamente positivos y negativos. Con este fin introduzcamos el ángulo

$$\omega = \frac{\pi}{4\,n}\,,$$

y consideremos sobre la circunferencia $4n$ puntos con argumentos

$$\omega, 3\omega, 5\omega, \ldots, (8n - 3)\omega, (8n - 1)\omega .$$

Estos puntos se designarán con $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{4n-1}$. Combinándolos en $2n$ pares $P_0, P_1; P_2, P_3; \ldots ; P_{4n-2}, P_{4n-1}$, será fácil demostrar que en los puntos de cada par, T toma valores de signos opuestos, y que estos signos serán

$$(-1)^k , (-1)^{k+1},$$

para el par P_{2k}, P_{2k+1}. Las amplitudes correspondientes a P_{2k} y P_{2k+1} son

$$\phi = (4k + 1)\frac{\pi}{4n} \quad \text{y} \quad \phi' = (4k + 3)\frac{\pi}{4n}$$

y, por lo tanto

$$\cos n\phi = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos n\phi' = (-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot$$

Multiplicando los correspondientes valores de T por $(-1)^k$ y $(-1)^{k+1}$, respectivamente, tenemos:

$$(-1)^k T = \frac{r^n}{\sqrt{2}} + (-1)^k A r^{n-1} \cos[(n-1)\phi + \alpha] + \\ + \ldots + (-1)^k L \cos\lambda$$

$$(-1)^{k+1} T = \frac{r^n}{\sqrt{2}} + (-1)^{k+1} A r^{n-1} \cos[(n-1)\phi' + \alpha] + \\ + \ldots + (-1)^{k+1} L \cos\lambda ,$$

y, por lo tanto, reemplazando

$$(-1)^k \cos[(n-1)\phi + \alpha], \ldots, (-1)^k \cos\lambda$$
$$(-1)^{k+1} \cos[(n-1)\phi' + \alpha], \ldots, (-1)^{k+1} \cos\lambda ,$$

por (-1), se llega a las siguientes desigualdades

$$(-1)^k T \geqq \frac{r^n}{\sqrt{2}} - Ar^{n-1} - \ldots - L$$

$$(-1)^{k+1} T \geqq \frac{r^n}{\sqrt{2}} - Ar^{n-1} - \ldots - L ,$$

cuyos segundos miembros, por la elección de r, son positivos; y esto prueba el enunciado. Por variar T continuamente con ϕ, se anulará $2n$ veces en los puntos (0), (1), (2), ..., $(2n - 1)$ cuyos argumentos serán, respectivamente:

$$\omega; 3\omega; 5\omega; 7\omega; 9\omega; 11\omega; \ldots ; (8n - 3)\omega; (8n - 1)\omega .$$

Es importante demostrar que estos puntos son los únicos en los que T se anula. Para demostrar ésto expresamos $\cos\phi$ y $\operatorname{sen}\phi$ en función de $\xi = \operatorname{tg}\frac{\phi}{2}$, de la siguiente manera:

$$\cos\phi = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} \quad ; \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{2\,\xi}{1+\xi^2},$$

e introducimos la expresión correspondiente

$$x = r\left(\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} + i\,\frac{2\,\xi}{1+\xi^2}\right),$$

en $f(x)$. Entonces, la parte real T se presenta en la forma

$$T = \frac{P_{2n}(\xi)}{(1+\xi^2)^n},$$

siendo $P_{2n}(\xi)$ un polinomio real de grado no mayor que $2n$. Por anularse este polinomio para $2n$ valores distintos de ξ, como se demostró, su grado es $2n$ y no puede anularse para ningún otro valor de ξ. Además, las $2n$ raíces cuya existencia se demostró, deben ser raíces simples y por lo tanto, alternarse los valores negativos y positivos de T al describir la circunferencia de radio r. Puesto que en el punto de argumento ω el valor de T es positivo y cambia de signo al pasar por el punto (0), en los $2n$ arcos entre

$$(0) \text{ y } (1) \;;\; (1) \text{ y } (2) \;;\; \ldots \;;\; (2n-2) \text{ y } (2n-1) \;;\; (2n-1) \text{ y } (0)$$

los signos de T serán alternativamente $-\;+\;-\;+$, etc.

5. — En tercer lugar, demostraremos que U toma valores positivos en los puntos (0), (2), ..., $(2n-2)$, y valores negativos en los puntos (1), (3), ..., $(2n-1)$. El argumento ϕ del punto (k) se encuentra entre

$$(4k+1)\frac{\pi}{4n} \quad \text{y} \quad (4k+3)\frac{\pi}{4n},$$

por lo tanto, $(-1)^k \operatorname{sen}\phi$ es positivo y mayor que $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Multiplicando U por $(-1)^k$ y reemplazando

$$(-1)^k \operatorname{sen}[(n-1)\,\phi + \alpha] \;;\; \ldots \;;\; (-1)^k \operatorname{sen}\lambda$$

por -1, tendremos

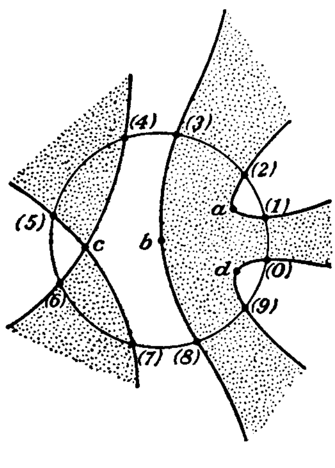
$$(-1)^k\, U \geqq r^n (-1)^k \operatorname{sen} n\,\phi - Ar^{n-1} - \ldots - L,$$

y también la desigualdad

$$(-1)^k\, U > \frac{r^n}{\sqrt{2}} - Ar^{n-1} - \ldots - L,$$

pero aquí el segundo miembro es positivo por la elección de r. Por lo tanto, el signo de U en el punto (k) es $(-1)^k$.

6. — Elegido un círculo Γ de radio $>R$, su circunferencia es dividida por los puntos (0), (1), (2), ..., $(2n - 1)$ en $2n$ arcos en los cuales el signo de T es alternativamente negativo y positivo. Cuando el círculo Γ crece, los arcos (0) (1); (1) (2) etc., delimitan $2n$ regiones, que se extienden hasta el infinito, dentro de las cuales T toma alternativamente valores positivos y negativos; estas regiones están separadas entre sí por curvas en las cuales $T = 0$. Para describir más intuitivamente la situación, llamaremos « mares » a estas n regiones, afuera de Γ, donde $T < 0$, y a las otras n regiones, donde $T > 0$, « continentes ». Las curvas en las que $T = 0$ serán las « costas ». Los n mares y los n continentes que existen en el exterior de Γ se extienden al interior de Γ a través de los arcos (0) (1); (1) (2); etc. Comenzando por el punto final (1) del arco (0) (1) a través del cual penetra un mar en el interior de Γ, imaginemos que caminamos a lo largo de la costa de modo que el continente quede a nuestra derecha, yendo hacia adentro. Debemos luego salir de Γ y cuando lo cruzamos nuevamente, yendo hacia afuera, el continente debe seguir estando a nuestra derecha. Si la circunferencia se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj, los continentes y mares se alternan, de donde se deduce que cruzamos Γ, yendo hacia afuera, en el punto (k), siendo k par; es decir, ya sea en (2), que es el caso más simple, o en (4), (6), etc. Por lo tanto existe una curva continua L que va de (1) a un punto (k), siendo k par. Sobre la curva L es constantemente $T = 0$; y en el punto (1), de acuerdo al Párrafo 5, $U < 0$, por lo que $U > 0$ en el punto (k). Por variar U continuamente, en algún punto de L debe tomar el valor 0, de modo que existe un punto dentro de Γ en el cual es $T = 0$ y $U = 0$, lo que prueba la existencia de una raíz.



La figura siguiente, copiada de Gauss y preparada para una ecuación especial de quinto grado, ilustra perfectamente lo que hemos dicho. Las áreas cubiertas por mares han sido sombreadas y las que representan continentes han sido dejadas en blanco. Ahora, si partimos de (1) y caminamos a lo largo de la costa llegamos al punto (2) sobre el círculo Γ, y entre ellos sobre esta costa hay un punto a que representa una raíz. Podemos partir tam-

bién de los puntos (3), (5), (7), (9) y seguir la costa en la forma descripta. Desde (3) llegamos a (8) pasando por otra raíz b. De (5) llegamos a (6) pasando por una raíz c, y de (7) llegamos a (4) pasando nuevamente por c. Finalmente, de (9) llegamos a (0) pasando por la raíz d. Esto nos indica que existen cuatro raíces a, b, c, d de las cuales c es una raíz doble.

El teorema fundamental del álgebra, por su naturaleza, pertenece más al análisis que al álgebra. Es natural, por lo tanto, que esta demostración de Gauss contenga elementos trascendentes de carácter analítico y topológico. Existen demostraciones, como la segunda de Gauss y otras obtenidas después de ella, en las que los elementos trascendentes fueron reducidos a un mínimo. Sólo se requiere en estas demostraciones un hecho que pertenece al análisis: que una ecuación real de grado impar tiene una raíz real.

APENDICE II

ACERCA DEL TEOREMA DE VINCENT

1. Si una ecuación sin raíces múltiples se transforma sucesivamente mediante las sustituciones

$$x = a + \frac{1}{y} \quad ; \quad y = b + \frac{1}{z} \quad ; \quad z = c + \frac{1}{t} \, ; \ldots$$

donde a, b, c, ... son enteros positivos arbitrarios, la ecuación transformada, después de un número suficiente de transformaciones, no presentará variaciones o tendrá sólo una. Este importante teorema fué publicado por Vincent en 1836 en el primer volumen del *Liuoville's Journal*, pero más tarde fué olvidado hasta tal punto que no se lo menciona en absoluto en un trabajo capital como es la *Enzyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. Sin embargo, el teorema de Vincent es la base del método tan eficiente para separar las raíces reales explicado en el Capítulo VI. En este apéndice daremos una demostración de una proposición algo más delicada que se enuncia como sigue:

Sea N_k el término k-ésimo de la sucesión

$$1; 1; 2; 3, 5; 8; 13; 21; \ldots$$

en la cual cada término es la suma de los dos precedentes y donde $\Delta > 0$ es la mínima distancia entre dos raíces cualesquiera de la ecuación $f(x) = 0$ de grado n, sin raíces múltiples. Supongamos elegido el número m de manera que:

$$N_{m-1}\,\Delta > \frac{1}{2} \quad ; \quad \Delta N_m N_{m-1} > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \tag{1}$$

donde

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1 \,. \tag{2}$$

Entonces la sustitución

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m + \cfrac{1}{\xi}}}} \tag{3}$$

presentada en la forma de una fracción contínua con elementos arbitrarios, enteros y positivos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, transforma la ecuación $f(x) = 0$ en la ecuación $F(\xi) = 0$ que no tiene más de una variación.

2. Sea, en general, P_k/Q_k la k-ésima reducida de la fracción contínua

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}$$

De la ley de formación de las reducidas:

$$P_{k+1} = a_{k+1} P_k + P_{k-1},$$
$$Q_{k+1} = a_{k+1} Q_k + Q_{k-1},$$

y considerando que $Q_1 = 1$; $Q_2 = a_2 \geqq 1$, se sigue de inmediato que $Q_k \geqq N_k$.

Además, la relación [3] aparece en la forma

$$x = \frac{P_m \xi + P_{m-1}}{Q_m \xi + Q_{m-1}}$$

de donde

$$\xi = -\frac{P_{m-1} - Q_{m-1} x}{P_m - Q_m x}. \qquad [4]$$

Si x es una raíz cualquiera de la ecuación $f(x) = 0$, la cantidad ξ, determinada por [4], es la raíz correspondiente de la ecuación transformada $F(\xi) = 0$.

Supóngase que x es una raíz imaginaria

$$x = a + bi \;;\; b \neq 0.$$

Entonces la parte real de la correspondiente raíz ξ, es:

$$R(\xi) = -\frac{(P_{m-1} - Q_{m-1} a)(P_m - Q_m a) + Q_{m-1} Q_m b^2}{(P_m - Q_m a)^2 + Q^2_m b^2}$$

que es ciertamente negativa si

$$(P_{m-1} - Q_{m-1} a)(P_m - Q_m a) \geqq 0.$$

Si, por el contrario,

$$(P_{m-1} - Q_{m-1} a)(P_m - Q_m a) < 0,$$

significa que a está contenido entre dos reducidas sucesivas:

$$\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}} \;;\; \frac{P_m}{Q_m},$$

la diferencia de las cuales es en valor absoluto igual a

$$\frac{1}{Q_{m-1}\,Q_m}\,.$$

Por lo tanto:

$$\left|\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}-a\right|<\frac{1}{Q_{m-1}\,Q_m}\quad;\quad\left|\frac{P_m}{Q_m}-a\right|<\frac{1}{Q_{m-1}\,Q_m}$$

de donde

$$|\,(P_{m-1}-a\,Q_{m-1})\,(P_m-a\,Q_m)\,|<\frac{1}{Q_{m-1}\,Q_m}\leqq 1\,.$$

En consecuencia, la parte real de ξ será negativa si

$$Q_{m-1}\,Q_m\,b^2>1\,.$$

Pero

$$Q_m \geqq Q_{m-1} \geqq N_{m-1} \quad \text{y} \quad |\,b\,|>\frac{\Delta}{2}\,.$$

La desigualdad que acabamos de escribir se deduce de

$$N_{m-1}\,\Delta>\frac{1}{2}\,,$$

y ésto, en virtud de [1], es cierto. Luego, las raíces imaginarias de la ecuación transformada tienen componentes reales negativas.

3. Supóngase que con x llamemos indefinidamente a las raíces reales de la ecuación $f\,(x)=0$, si las hay. Deben considerarse dos casos. Supóngase primero que en correspondencia con todas las raíces reales x

$$(P_{m-1}-Q_{m-1}\,x)\,(P_m-Q_m\,x)>0\,.$$

Entonces se deduce de [4] que todas las raíces reales de la ecuación transformada $F\,(\xi)=0$ serán negativas. Se ha demostrado ya que todas las raíces imaginarias de esta ecuación tienen componentes reales negativas. En consecuencia, $F\,(\xi)$, además de un factor constante, consta de factores lineales reales $\xi+a$ con a positivo y factores cuadráticos $\xi^2+b\,\xi+c$ con b y c positivos. Luego el polinomio $F\,(\xi)$ no presenta variaciones.

Supongamos en el segundo caso que para alguna raíz real x

$$(P_{m-1}-Q_{m-1}\,x)\,(P_m-Q_m\,x)\leqq 0\,.$$

Entonces x pertenece al intervalo

$$\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}\;;\;\frac{P_m}{Q_m}$$

y por lo tanto

$$\left| x - \frac{P_m}{Q_m} \right| \leqq \frac{1}{Q_{m-1}\,Q_m}\,.$$

Sea x' otra raíz cualquiera, real o imaginaria, de $f(x) = 0$ y ξ' la raíz correspondiente de la ecuación transformada. Entonces, teniendo siempre presente que

$$P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = (-1)^m,$$

se concluye de [4] que

$$\xi' + \frac{Q_{m-1}}{Q_m} = \frac{(-1)^m}{Q_m\,(P_m - Q_m x')}$$

o bien

$$\xi' = -\frac{Q_{m-1}}{Q_m}\left[1 - \frac{(-1)^m}{Q_m Q_{m-1}\left(\dfrac{P_m}{Q_m} - x'\right)} = -\frac{Q_{m-1}}{Q_m}\,(1 + \alpha)\right]$$

siendo

$$\alpha = \frac{(-1)^{m-1}}{Q_m Q_{m-1}\left(\dfrac{P_m}{Q_m} - x'\right)}\,.$$

Ahora

$$\left| \frac{P_m}{Q_m} - x' \right| = \left| \frac{P_m}{Q_m} - x + x - x' \right| \geqq \Delta - \frac{1}{Q_m Q_{m-1}} > 0,$$

y

$$|\,\alpha\,| \leqq \frac{1}{\Delta\, Q_m Q_{m-1} - 1} \leqq \frac{1}{\Delta\, N_m N_{m-1} - 1}\,.$$

Pero por la segunda de las desigualdades [1]

$$\Delta\, N_m N_{m-1} - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

y así

$$|\,\alpha\,| < \varepsilon\,.$$

Entonces, las raíces de la ecuación transformada correspondientes a las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de la ecuación $f(x) = 0$, diferentes de x, son de la forma

$$\xi_k = -\frac{Q_{m-1}}{Q_m}\,(1 + \alpha_k)\,,$$

y

$$|\,\alpha_k\,| < \varepsilon\,.$$

Examinemos ahora el producto

$$(t + 1 + \alpha_1)(t + 1 + \alpha_2) \dots (t + 1 + \alpha_{n-1}) = t^{n-1} + R_1 t^{n-2} + \dots + R_{n-1}.$$

Tenemos

$$R_k = \Sigma (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k),$$

consisitiendo la suma de $\binom{n-1}{k}$ términos. Desde que

$$|(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k) - 1| \leqq (1 + |\alpha_1|)(1 + |\alpha_2|) \dots$$
$$\dots (1 + |\alpha_k|) - 1$$

y

$$|\alpha_h| < \varepsilon \quad ; \quad h = 1, 2, \dots, n - 1,$$

tenemos

$$|(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k) - 1| \leqq (1 + \varepsilon)^k - 1$$
$$\leqq (1 + \varepsilon)^{n-1} - 1 = \frac{1}{n}.$$

Es fácil comprender entonces que R_k pueda presentarse en la forma

$$R_k = \binom{n-1}{k}(1 + \delta_k)$$

donde

$$|\delta_k| < \frac{1}{n}.$$

Entonces:

$$R_k > 0.$$

4. Es de primordial importancia demostrar que la razón (hacemos $R_0 = 1$).

$$\frac{R_k}{R_{k-1}}$$

disminuye con k creciente. Como

$$\frac{R_k}{R_{k-1}} = \frac{n-k}{k} \quad \frac{1 + \delta_k}{1 + \delta_{k-1}} \quad ; \quad \frac{R_{k+1}}{R_k} = \frac{n-k-1}{k+1} \cdot \frac{1 + \delta_{k+1}}{1 + \delta_k}$$

es suficiente demostrar que

$$\frac{k(n-k-1)}{(k+1)(n-k)} < \frac{(1 + \delta_k)^2}{(1 + \delta_{k-1})(1 + \delta_{k+1})}. \qquad [5]$$

Ahora:

$$\frac{k(n-k-1)}{(k+1)(n-k)} = 1 - \frac{n}{(k+1)(n-k)} \leqq 1 - \frac{4n}{(n+1)^2} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

Por otra parte:

$$\frac{(1+\delta_k)^2}{(1+\delta_{k-1})(1+\delta_{k+1})} > \frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

y de esa manera la desigualdad [5] queda demostrada.

5. Supóngase que para la raíz x la desigualdad estricta

$$(P_{m-1} - Q_{m-1}x)(P_m - Q_m x) < 0,$$

se cumpla. Entonces, la raíz ξ de la ecuación transformada correspondiente a x será positiva, y puede demostrarse que el polinomio

$$(u-\xi)(u-\xi_1)\ldots(u-\xi_{n-1}) = \phi(u),$$

que difiere de $F(u)$ sólo por un factor constante, presenta solamente una variación.

Sustituyendo

$$u = \frac{Q_{m-1}}{Q_m}v \quad ; \quad \xi = \frac{Q_{m-1}}{Q_m}\omega \quad ; \quad \omega > 0,$$

tenemos

$$\phi(u) = \left(\frac{Q_{m-1}}{Q_m}\right)^n (v-\omega)(v+1+\alpha_1)\ldots(v+1+\alpha_{n-1}),$$

de manera que es suficiente demostrar la afirmación para el polinomio

$$(v-\omega)(v+1+\alpha_1)\ldots(v+1+\alpha_{n-1}) = (v-\omega)(v^{n-1}+R_1v^{n-2}+$$
$$+\ldots+R_{n-1}) = v^n + (R_1-\omega)v^{n-1} + (R_2 - R_1\omega)v^{n-2} +$$
$$+\ldots+(R_{n-1}-R_{n-2}\omega)v - R_{n-1}\omega.$$

Este polinomio presenta evidentemente una variación y no más de una, desde que $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$, ω son positivas y

$$R_1 - \omega \quad ; \quad \frac{R_2}{R_1} - \omega\ ; \ldots ;\ \frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} - \omega \quad ; \quad -\omega,$$

es una sucesión decreciente de números.

Queda por considerar el caso

$$(P_{m-1} - Q_{m-1}x)(P_m - Q_m x) = 0.$$

Todas las conclusiones referentes a las raíces de la ecuación transformada correspondientes a las que difieren de x, se mantienen por fuerza y, en particular, la conclusión de que $R_k > 0$. Solamente en el caso en que

$$P_{m-1} - Q_{m-1}x = 0,$$

la cantidad llamada ξ será igual a cero. Evidentemente entonces la ecuación transformada no tiene variaciones.

En el caso en que

$$P_m - Q_m x = 0,$$

tendremos $\xi = \infty$, lo que demuestra que la ecuación transformada se reduce al grado $n - 1$. El polinomio $F(u)$ difiere del producto

$$(u - \xi_1)(u - \xi_2) \ldots (u - \xi_{n-1}),$$

solamente por un factor constante, producto que desarrollado no presenta variaciones. Luego, el teorema de Vincent queda perfectamente demostrado.

APENDICE III

ACERCA DE LAS ECUACIONES CUYAS RAICES TIENEN PARTE REAL NEGATIVA

1. En el estudio de la estabilidad dinámica de sistemas mecánicos es necesario tener un criterio simple para decidir si todas las raíces de una ecuación algebraica con coeficientes reales

$$f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n = 0\,, \tag{1}$$

tienen parte real negativa. Este problema fué planteado por Maxwell, estudiado luego por Routh, y resuelto de una manera muy elegante por Hurwitz. Hurwitz halló el siguiente criterio: *La ecuación* [1] *tiene todas las raíces con parte real negativa únicamente si los n determinantes*

$$D_1 = p_1 \quad ; \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} \quad ; \quad D_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix} \quad ; \; \ldots \; ;$$

$$D_n = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & \ldots & 0 \\ p_3 & p_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & \ldots & p_n \end{vmatrix}$$

son positivos, siempre que, como puede legitimamente suponerse, $p_0 > 0$. En todos los determinantes los índices de las letras p en cada fila decrecen de a 1, y las letras con índices negativos y aquéllas cuyos índices son $> n$, se reemplazan por ceros.

En el caso de $n = 2$, este criterio se verifica directamente. Porque las condiciones en ese caso son

$$p_0 > 0 \quad ; \quad p_1 > 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ 0 & p_2 \end{vmatrix} = p_1 p_2 > 0$$

o sea: $p_0 > 0$; $p_1 > 0$; $p_2 > 0$, y entonces es evidente que

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = 0\,.$$

tiene raíces con parte real negativa. Suponiendo que el criterio de Hurwitz es verdadero para ecuaciones de grado $n - 1$, vamos a demostrar que

continúa siendo cierto para ecuaciones de grado n, completando de esa manera la demostración por inducción. Seguiremos un método simple y elegante de I. Schur.

Puede establecerse sin reparos la siguiente proposición: *Si todas las raíces de $f(x)$ tienen parte real negativa y ξ es un número complejo, será*

$$
\begin{aligned}
|f(\xi)| &> |f(-\xi)| \quad \text{si} \quad R\,\xi > 0\,,\\
|f(\xi)| &= |f(-\xi)| \quad \text{si} \quad R\,\xi = 0\,,\\
|f(\xi)| &< |f(-\xi)| \quad \text{si} \quad R\,\xi < 0\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Consideremos la descomposición factorial de $f(x)$:

$$f(x) = p_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\,.$$

Suponiendo $\xi = a + bi$ y considerando el factor lineal real $x - \alpha_k$, tenemos

$$|\xi - \alpha_k|^2 = (a-\alpha_k)^2 + b^2\,,$$

en consecuencia, puesto que por hipótesis $\alpha_k < 0$:

$$|\xi - \alpha_k| \gtreqless |-\xi-\alpha_k| \tag{3}$$

por ser

$$a = R\xi \gtreqless 0\,.$$

Los factores lineales imaginarios aparecen en pares conjugados. Sea $x - \alpha_r$ y $x - \alpha_s$ uno de estos pares y

$$\alpha_r = \gamma_r + i\delta_r \quad ; \quad \alpha_s = \gamma_r - i\delta_r \quad ; \quad \gamma_r < 0 \quad ; \quad \delta_r > 0\,.$$

Será:

$$|\xi-\alpha_r|^2 = (a-\gamma_r)^2 + (b-\delta_r)^2 \quad ; \quad |\xi-\alpha_s|^2 = (a-\gamma_r)^2 + (b+\delta_r)^2,$$

y

$$|-\xi-\alpha_r|^2 = (a+\gamma_r)^2 + (b+\delta_r)^2 \quad ; \quad |-\xi-\alpha_s|^2 = (a+\gamma_r)^2 + (b-\delta_r)^2\,.$$

Pero

$$(a-\gamma_r)^2 \gtreqless (a+\gamma_r)^2\,,$$

según sea

$$a \gtreqless 0\,.$$

En consecuencia

$$|(\xi-\alpha_r)(\xi-\alpha_s)| \gtreqless |(-\xi-\alpha_r)(-\xi-\alpha_s)| \tag{4}$$

ya que es

$$R\,\xi \gtreqless 0\,.$$

Las desigualdades [2] se deducen fácilmente de [3] y [4].

2. Si hacemos

$$\frac{1}{2}\psi = p_0 p_1 + \omega (p_1 p_2 - p_0 p_3) x + p_0 p_3 x^2 + \omega (p_1 p_4 - p_0 p_5) x^3 + \ldots \qquad [5]$$

es fácil comprobar que

$$x\psi = \left[p_0\left(1 - \frac{\omega}{x}\right) + p_1\omega\right] f(x) - \left[p_0\left(1 - \frac{\omega}{x}\right) - p_1\omega\right] f(-x)$$

o bien

$$x\psi = A(x) f(x) - B(x) f(-x), \qquad [6]$$

donde

$$A(x) = p_0\left(1 - \frac{\omega}{x}\right) + p_1\omega \quad ; \quad B(x) = p_0\left(1 - \frac{\omega}{x}\right) - p_1\omega .$$

Supongamos que $p_0 > 0$; $p_1 > 0$; $\omega > 0$ y sea x un número complejo $\neq 0$ tal que

$$R\frac{\omega}{x} < 1 .$$

Entonces, es fácil ver que

$$|A(x)| > |B(x)| . \qquad [7]$$

3. Las raíces de la ecuación $\psi = 0$ varían con ω, pero sus recíprocas estarán acotadas si ω está acotado, por ejemplo si $\omega < 1$. Porque esta ecuación, como es fácil comprobar, es de grado $n - 1$, y las recíprocas de sus raíces satisfacen a la ecuación

$$x^{n-1} + \omega\frac{p_1 p_2 - p_0 p_3}{p_0 p_1} x^{n-2} + \frac{p_3}{p_1} x^{n-3} + \ldots = 0 ,$$

cuyos coeficientes están acotados. Por lo tanto, ω puede tomarse positivo y tan pequeño como sea necesario de modo que para todas las raíces de $\psi = 0$ sea

$$R\frac{\omega}{x} < 1 .$$

Entonces, las partes reales de todas las raíces de $\psi = 0$ serán negatvas si las partes reales de las raíces de $f(x) = 0$ son negativas. Porque, suponiendo que para alguna raíz ξ de $\psi = 0$

$$R\,\xi \geqq 0 .$$

Entonces, según [6]

$$A(\xi) f(\xi) = B(\xi) f(-\xi) ,$$

y según [7]

$$|A(\xi)| > |B(\xi)| ,$$

por ser

$$R\,\frac{\omega}{\xi} < 1\,.\,.$$

En consecuencia:

$$|\,f(\xi)\,| = \frac{|\,B(\xi)\,|}{|\,A(\xi)\,|}\,|\,f(-\xi)\,| < |\,f(-\xi)\,|\,,$$

lo cual es imposible siendo $R\,\xi \geqq 0$.

4. La recíproca también es cierta: Si $p_0 > 0$; $p_1 > 0$, y todas las raíces de $\psi = 0$ tienen parte real negativa, entonces todas las raíces de $f(x) = 0$ tienen parte real negativa. Cambiando, en la identidad

$$x\,\psi(x) = A(x)\,f(x) - B(x)\,f(-x)$$

x por $-x$, tenemos

$$x\,\psi(-x) = B(-x)\,f(x) - A(-x)\,f(-x)\,,$$

y resolviendo para $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x\,A(-x)}{A(x)\,A(-x) - B(x)\,B(-x)}\,\psi(x) - \\ - \frac{x\,B(x)}{A(x)\,A(-x) - B(x)\,B(-x)}\,\psi(-x)\,.$$

Pero

$$A(x)\,A(-x) - B(x)\,B(-x) = 4\,p_0\,p_1\,\omega$$

y entonces

$$4\,p_0\,p_1\,\omega\,f(x) = xA(-x)\,\psi(x) - xB(x)\,\psi(-x)\,. \qquad [8]$$

Supongamos ahora que $\xi \neq 0$ es una raíz de $f(x) = 0$ y que $R\,\xi \geqq 0$. Se desprende de [8] que

$$A(-\xi)\,\psi(\xi) = B(\xi)\,\psi(-\xi)\,. \qquad [9]$$

Haciendo $\xi = a + bi$, tenemos

$$A(-\xi) = p_0\,(1 + a\,\omega + ib\,\omega) + p_1\,\omega\,,$$
$$B(\xi) = p_0\,(1 - a\,\omega - ib\,\omega) - p_1\,\omega\,,$$

y

$$|\,A(-\xi)\,|^2 = [p_0\,(1 + a\,\omega) + p_1\,\omega]^2 + p_0^2\,b^2\,\omega^2\,,$$
$$|\,B(\xi)\,|^2 = [p_0\,(1 - a\,\omega) - p_1\,\omega]^2 + p_0^2\,b^2\,\omega^2\,,$$

en consecuencia

$$|\,A(-\xi)\,|^2 - |\,B(\xi)\,|^2 = 4\,\omega\,p_0^2\,a + 4\,p_0\,p_1\,\omega > 0$$

o sea:

$$|A(-\xi)| > |B(\xi)|.$$

Entonces, de [9]

$$|\psi(\xi)| = \frac{|B(\xi)|}{|A(-\xi)|}\,|\psi(-\xi)| < |\psi(-\xi)|,$$

y ésto es imposible siendo $R\,\xi \geqq 0$, porque todas las raíces de $\psi = 0$, por hipótesis, tienen parte real negativa.

5. En correspondencia con los determinantes $D_1, D_2, \ldots$ para la ecuación $\psi = 0$ tenemos los determinantes

$$\Delta_1 = \omega\,(p_1 p_2 - p_0 p_3) \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \omega\,(p_1 p_2 - p_0 p_3) & p_0 p_1 \\ \omega\,(p_1 p_4 - p_0 p_5) & p_0 p_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \omega\,(p_1 p_2 - p_0 p_3) & p_0 p_1 & 0 \\ \omega\,(p_1 p_4 - p_0 p_5) & p_0 p_3 & \omega\,(p_1 p_2 - p_0 p_3) \\ \omega\,(p_1 p_6 - p_0 p_7) & p_0 p_5 & \omega\,(p_1 p_4 - p_0 p_5) \end{vmatrix} \; ; \ldots$$

Ahora bien

$$\Delta_1 = \omega\,D_2 \quad ; \quad \Delta_2 = \omega\,p_0 \begin{vmatrix} p_1 p_2 - p_0 p_3 & p_1 \\ p_1 p_4 - p_0 p_5 & p_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega\,p_0\,p_1^{-1} \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_1 p_2 - p_0 p_3 & p_1 \\ p_5 & p_1 p_4 - p_0 p_5 & p_3 \end{vmatrix}$$

o sea

$$\Delta_2 = \omega\,p_0 \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix} = \omega\,p_0\,D_3.$$

En forma similar:

$$\Delta_3 = \omega^2\,p_1^{-1} \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ p_3 & p_1 p_2 - p_0 p_3 & p_0 p_1 \\ p_5 & p_1 p_4 - p_0 p_5 & p_0 p_3 \\ p_7 & p_1 p_6 - p_0 p_7 & p_0 p_5 \end{vmatrix} = \omega^2\,p_0\,p_1 \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 \\ p_7 & p_6 & p_5 & p_4 \end{vmatrix}$$

o bien

$$\Delta_3 = \omega^2\,p_0\,p_1\,D_4$$

En general, todo determinante Δ_k difiere de D_{k+1} sólo en un factor positivo. Podemos demostrar ahora que las condiciones

$$D_1 > 0 \quad ; \quad D_2 > 0 \; ; \; \ldots \; ; \; D_n > 0,$$

son suficientes para que una ecuación $f(x) = 0$ de grado n tenga todas

las raíces con parte real negativa, porque entonces tenemos $p_0 > 0$; $p_1 > 0$ y

$$\Delta_1 > 0 \quad ; \quad \Delta_2 > 0 \quad ; \quad \ldots , \Delta_{n-1} > 0 .$$

Por lo tanto, suponiendo que el criterio valga para ecuaciones de grado $n - 1$, la ecuación $\psi = 0$ tendrá todas las raíces con parte real negativa y entonces (Párrafo 4) también será verdad para $f(x) = 0$. Las condiciones

$$D_1 > 0 \quad ; \quad D_2 > 0 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad D_n > 0 ,$$

son también necesarias. Porque si $f(x) = 0$ tiene todas las raíces con parte real negativa, el polinomio $f(x)$ consta de factores lineales $x + \alpha$ con α positivo y factores cuadráticos $x^2 + 2\beta x + \gamma$ con β y γ positivos. Por lo tanto, todos los coeficientes de $f(x)$ son del mismo signo, y suponiendo que $p_0 > 0$, tendremos también $D_1 = p_1 > 0$. Teniendo la ecuación $\psi = 0$ todas las raíces con parte real negativa (Párrafo 3), es necesario que

$$\Delta_1 > 0 \quad ; \quad \Delta_2 > 0 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \Delta_{n-1} > 0 ,$$

por hipótesis; en consecuencia también

$$D_2 > 0 \quad ; \quad D_3 > 0 \; ; \ldots \; ; D_n > 0 .$$

Entonces:

$$D_1 > 0 \quad ; \quad D_2 > 0 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad D_n > 0 ,$$

si todas las raíces de $f(x) = 0$ tienen parte real negativa, supuesto $p_0 > 0$.

APENDICE IV

SOLUCION ITERATIVA DE LA ECUACION DE FRECUENCIA

1. En el estudio de pequeñas vibraciones de sistemas mecánicos hay que tratar con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \dots + a_{1n} q_n &= 0\,, \\ \ddot{q}_2 + a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \dots + a_{2n} q_n &= 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \ddot{q}_n + a_{n1} q_1 + a_{n2} q_2 + \dots + a_{nn} q_n &= 0\,, \end{aligned} \qquad [1]$$

que determinan la variación con el tiempo de los n parámetros independientes $q_1, q_2, \dots, q_n$ que definen la configuración del sistema. Las constantes reales a_{ij} satisfacen la condición

$$a_{ij} = a_{ji}\,,$$

para todos los índices i, j de manera que la matriz de las formas lineales de los primeros miembros de [1] es simétrica. Para resolver las ecuaciones [1] se buscan soluciones de la forma

$$q_k = A_k \operatorname{sen}(pt + \alpha)\,, \qquad [2]$$

que representan oscilaciones armónicas naturales con la misma frecuencia p y fase α, pero de diferentes amplitudes correspondientes a diferentes parámetros. Sustituyendo la expresión [2] en las ecuaciones [1] y simplificando el factor sen $(pt + \alpha)$ obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (a_{11} - p^2) A_1 + a_{12} A_2 + \dots + a_{1n} A_n &= 0\,, \\ a_{21} A_1 + (a_{22} - p^2) A_2 + \dots + a_{2n} A_n &= 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} A_1 + a_{n2} A_2 + \dots + (a_{nn} - p^2) A_n &= 0\,. \end{aligned} \qquad [3]$$

Haciendo $p^2 = \lambda$ y considerando que no todas las amplitudes se anulan, se concluye que el determinante del sistema [3] debe anularse. Esto da la siguiente ecuación en λ en forma de determinante

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad [4]$$

cuyo grado es n. Esta ecuación se llama *ecuación de frecuencia.* La misma ecuación aparece en la teoría de las perturbaciones seculares de las órbitas planetarias y por esta razón a menudo se la llama *ecuación secular.* Considerada independientemente de los problemas físicos o astronómicos, la misma ecuación es conocida como la *ecuación característica* de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como se expresó anteriormente, se supondrá que esta matriz es simétrica.

2. Dos conjuntos de amplitudes $A_1, A_2, \dots, A_n$ y $A_1', A_2', \dots, A_n'$ correspondientes a dos raíces distintas λ y λ' de la ecuación de frecuencia satisfacen la condición de *ortogonalidad*

$$A_1 A_1' + A_2 A_2' + \dots + A_n A_n' = 0.$$

El origen de esta expresión se explica por el hecho de que dos vectores

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$
$$A' = (A_1' A_2' \dots, A_n'),$$

se llaman ortogonales si su producto escalar

$$A \times A' = A_1 A_1' + A_2 A_2' + \dots + A_n A_n',$$

se anula. Para probar la afirmación anterior considérense dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + \dots + a_{1n} A_n &= \lambda A_1, \\ a_{21} A_1 + a_{22} A_2 + \dots + a_{2n} A_n &= \lambda A_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} A_1 + a_{n2} A_2 + \dots + a_{nn} A_n &= \lambda A_n, \end{aligned} \qquad [5]$$

y

$$\begin{aligned} a_{11} A_1' + a_{12} A_2' + \dots + a_{1n} A_n' &= \lambda' A_1, \\ a_{21} A_1' + a_{22} A_2' + \dots + a_{2n} A_n' &= \lambda' A_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} A_1' + a_{n2} A_2' + \dots + a_{nn} A_n' &= \lambda' A_n. \end{aligned} \qquad [6]$$

Las ecuaciones [5] multiplicadas respectivamente por $A_1', A_2', \dots, A_n'$ y sumadas dan por resultado

$$\sum_{i,j} a_{ij} A_i' A_j = \lambda (A_1 A_1' + A_2 A_2' + \dots + A_n A_n') \qquad [7]$$

donde en el primer miembro la doble sumatoria se refiere a los índices i, j que toman independientemente los valores $1, 2, \ldots, n$. Las ecuaciones [6] multiplicadas por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y sumadas dan, por otra parte:

$$\sum_{i,j} a_{ji} A_i' A_j = \lambda' (A_1 A_1' + A_2 A_2' + \ldots + A_n A_n'). \qquad [8]$$

Pero como $a_{ij} = a_{ji}$ ambas sumas de los primeros miembros de [7] y [8] son iguales y restando tenemos

$$(\lambda - \lambda') (A_1 A_1' + A_2 A_2' + \ldots + A_n A_n') = 0$$

y así

$$A_1 A_1' + A_2 A_2' + \ldots + A_n A_n' = 0,$$

ya que $\lambda' \neq \lambda$.

La relación de ortogonalidad puede usarse para demostrar, siguiendo a Lagrange, que las raíces de la ecuación de frecuencia son reales. Supóngase que hubiera una raíz imaginaria $\lambda = \alpha + \beta i$; $\beta \neq 0$; entonces existirá una raíz imaginaria conjugada $\lambda' = \alpha - \beta i$ y sería $\lambda' \neq \lambda$.

Las ecuaciones [5] se satisfacen para valores complejos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ no todos nulos. Las ecuaciones [6] correspondientes a la raíz conjugada será satisfecha por números $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$ conjugados, respectivamente, de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y la relación de ortogonalidad da

$$A_1 \overline{A}_1 + A_2 \overline{A}_2 + \ldots + A_n \overline{A}_n = 0$$

o bien

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 + \ldots + |A_n|^2 = 0,$$

lo cual requiere que

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0,$$

contrario a la hipótesis.

En las aplicaciones mecánicas, las raíces λ son no sólo reales, sino positivas y distintas, exceptuando casos verdaderamente excepcionales de aplicaciones de poco interés. La formación de la ecuación de frecuencia según el desarrollo del determinante [4], puede ser de orden elevado en algún caso, lo que representa un trabajo tedioso. Cuando las raíces λ difieren considerablemente en magnitud los ingenieros prefieren cálculos aproximados de las mismas por algún proceso de iteración. El propósito de este apéndice es explicar los lineamientos de este proceso.

3. La exposición ganará considerablemente en simplicidad y elegancia haciendo uso del álgebra de las matrices. Con este fin debemos agregar algunas nociones que no se han dado en el texto del Capítulo IX, Párrafos 12 al 15.

Una matriz A^* obtenida de la matriz A cambiando filas y columnas se llama transpuesta o conjugada de A. Una matriz simétrica es autoconjugada, de manera que

$$A^* = A$$

y viceversa, cualquier matriz que satisfaga esta relación es simétrica. Los determinantes de las matrices conjugadas son iguales. Por la regla de multiplicación de matrices se verifica la siguiente ecuación:

$$(AB)^* = B^* A^*$$

que puede interpretarse diciendo que la matriz conjugada del producto es igual al producto de las conjugadas de los factores tomados en orden inverso. Una matriz S se llama *ortogonal* si satisface la condición de la ecuación

$$SS^* = E \qquad [9]$$

de donde se deduce, en primer lugar, por la regla de la multiplicación de determinantes, que:

$$(\det S)^2 = 1$$

de manera que

$$\det S = \pm 1$$

y en segundo lugar, que

$$S^* = S^{-1}$$

y, por lo tanto, también

$$S^* S = E. \qquad [10]$$

Si c_{ij} son elementos de una matriz ortogonal, surge de las ecuaciones [9] y [10] que ellas satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \ldots + c_{in}^2 &= 1 \\ c_{i1} c_{j1} + c_{i2} c_{j2} + \ldots + c_{in} c_{jn} &= 0 \quad \text{para} \quad i \neq j, \end{aligned} \qquad [11]$$

y

$$\begin{aligned} c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 &= 1 \\ c_{1i} c_{1j} + c_{2i} c_{2j} + \ldots + c_{ni} c_{nj} &= 0 \quad \text{para} \quad i \neq j. \end{aligned} \qquad [12]$$

4. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ las amplitudes correspondientes a una **raíz** λ de la ecuación de frecuencia. Al multiplicarlas por un factor conveniente puede suponerse que

$$A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 = 1.$$

Las amplitudes que satisfacen esta condición serán llamadas *normalizadas*. Sean

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n \end{array}$$

amplitudes normalizadas correspondientes, respectivamente, a las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la ecuación de frecuencia. Si suponemos, por simplicidad, que estas raíces son simples, las amplitudes normalizadas correspondientes a las mismas satisfarán la relación de ortogonalidad, de donde, en virtud de [11], se deduce que la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_1 & \nu_2 & \ldots & \nu_n \end{pmatrix}$$

es ortogonal. Las amplitudes correspondientes a la raíz λ_1 satisfacen las ecuaciones

$$\begin{array}{l} a_{11}\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\,\alpha_n = \lambda_1\,\alpha_1\,, \\ a_{21}\,\alpha_1 + a_{22}\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\,\alpha_n = \lambda_1\,\alpha_2\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,\alpha_1 + a_{n2}\,\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\,\alpha_n = \lambda_1\,\alpha_n\,, \end{array}$$

que, introduciendo la matriz columna

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

puede condensarse en una ecuación matricial

$$A\,(\alpha) = \lambda_1\,(\alpha)\,.$$

De esta ecuación surge que

$$\begin{array}{l} A^2\,(\alpha) = AA\;(\alpha) = \lambda_1\;A\,(\alpha) = \lambda_1^2\,(\alpha) \\ A^3\,(\alpha) = AA^2\,(\alpha) = \lambda_1^2\,A\,(\alpha) = \lambda_1^3\,(\alpha) \end{array}$$

y en general, que

$$A^m\,(\alpha) = \lambda_1{}^m\,(\alpha)\,.$$

Introduciendo en forma similar matrices columnas $(\beta), \ldots, (\nu)$ correspondientes a las raíces $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tenemos entonces n ecuaciones matriciales

$$A^m\,(\alpha) = \lambda^m{}_1\,(\alpha) \quad ; \quad A^m\,(\beta) = \lambda_2{}^m\,(\beta)\;; \;\ldots\; ; A^m\,(\nu) = \lambda_n{}^m\,(\nu)\,.$$

Sea

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

una matriz columna y escribamos

$$AC = C_1 \quad ; \quad AC_1 = C_2 \quad ; \quad AC_2 = C_3 \; ; \ldots$$

y, en general

$$C_m = AC_{m-1} = A^m C. \tag{14}$$

Por otra parte, pueden determinarse constantes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tales que

$$C = \gamma_1 (\alpha) + \gamma_2 (\beta) + \ldots + \gamma_n (\nu),$$

de [14] y [13] surge entonces que

$$C_m = \lambda_1{}^m \gamma_1 (\alpha) + \gamma_2{}^m \lambda_2 (\beta) + \ldots + \lambda_n{}^m \gamma_n (\nu).$$

Si $c_1{}^{(m)}; c_2{}^{(m)}; \ldots ; c_n{}^{(m)}$ son elementos de C_m, la última ecuación demuestra que

$$c_i{}^{(m)} = \gamma_1 \lambda_1{}^m \alpha_i + \gamma_2 \lambda_2{}^m \beta_i + \ldots + \gamma_n \lambda_n{}^m \nu_i, \tag{15}$$

para $i = 1; 2; \ldots ; n$. Nótese que debido a la ortogonalidad de S

$$\gamma_1 = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \ldots + c_n \alpha_n. \tag{16}$$

De [15] se sigue que

$$\frac{c_i{}^{(m+1)}}{c_i{}^{(m)}} = \frac{\gamma_1 \lambda_1{}^{m+1} \alpha_i + \gamma_2 \lambda_2{}^{m+1} \beta_i + \ldots + \gamma_n \lambda_n{}^{m+1} \nu_i}{\gamma_1 \lambda_1{}^m \alpha_i + \gamma_2 \lambda_2{}^m \beta_i + \ldots + \gamma_n \lambda^m{}_n \nu_i}$$

o bien

$$\frac{c_i{}^{(m+1)}}{c_i{}^{(m)}} = \lambda_1 \frac{\gamma_1 \alpha_i + \gamma_2 \beta_i \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \ldots + \gamma_n \nu_i \left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{\gamma_1 \alpha_i + \gamma_2 \beta_i \left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m} + \ldots + \gamma_n \nu_i \left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m}}.$$

Supóngase ahora que λ_1 es la mayor de las raíces; entonces las razones

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \ldots ; \frac{\lambda_n}{\lambda_1},$$

serán menores que 1 y sus potencias convergerán a cero cuando los exponentes aumenten indefinidamente. Supuesto, por lo tanto, que $\gamma_1 \alpha_i \neq 0$, el límite de la razón

$$\frac{c_i{}^{(m+1)}}{c_i{}^{(m)}}$$

con $m \to \infty$ será λ_1, y para m grande, la mayor de las raíces (correspondiente a la máxima frecuencia) puede ser calculada aproximadamente de la ecuación

$$\lambda_1 = \frac{c_i^{(m+1)}}{c_i^{(m)}} ,$$

donde, en general, i puede ser uno cualquiera de los números $1, 2, \ldots, n$. Consideraciones similares demuestran también que para m grande las razones

$$\frac{c_2^{(m)}}{c_1^{(m)}} ; \ldots ; \frac{c_n^{(m)}}{c_1^{(m)}} ,$$

serán aproximadamente iguales a las razones de las amplitudes

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} ; \ldots ; \frac{\alpha_n}{\alpha_1} .$$

El cálculo de $c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \ldots, c_n^{(m)}$ puede realizarse por un simple método recurrente, usando las fórmulas

$$\begin{aligned} c_1^{(m+1)} &= a_{11} c_1^{(m)} + a_{12} c_2^{(m)} + \ldots + a_{1n} c_n^{(m)} , \\ c_2^{(m+1)} &= a_{21} c_1^{(m)} + a_{22} c_2^{(m)} + \ldots + a_{2n} c_n^{(m)} , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n^{(m+1)} &= a_{n1} c_1^{(m)} + a_{n2} c_2^{(m)} + \ldots + a_{nn} c_n^{(m)} . \end{aligned}$$

Con respecto a los valores iniciales de $c_1, c_2, \ldots, c_n$, pueden ser tomados arbitrariamente, con la sola condición de que

$$\gamma_1 = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \ldots + c_n \alpha_n \neq 0 .$$

Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se toman al azar, esta condición se satisfará en general. Para encontrar la raíz menor de la ecuación de frecuencia, o sea la mínima frecuencia, puede aplicarse el mismo método a la matriz recíproca A^{-1}. Para demostrarlo, nótese que la ecuación característica de A es

$$F(\lambda) = \det (A - \lambda E) = 0 .$$

Ahora

$$A (A^{-1} - \lambda^{-1} E) = -\lambda^{-1} (A - \lambda E) ,$$

de donde, por la regla de multiplicación de determinantes

$$\det A \,.\, \det (A^{-1} - \lambda^{-1} E) = (-1)^n \lambda^{-n} \det (A - \lambda E)$$

y de esto se sigue que las raíces de la ecuación característica para la matriz recíproca A^{-1} son

$$\lambda_1^{-1} \;;\; \lambda_2^{-1} ; \ldots ; \lambda_n^{-1} ,$$

y la mayor de ellas es la recíproca de la menor raíz correspondiente a A. Por lo tanto, la menor raíz puede calcularse por ei proceso anterior. Una vez que la raíz mayor se ha calculado con suficiente aproximación, las otras raíces pueden calcularse aproximadamente por el mismo método, suplementado con ciertas consideraciones adicionales, pero que nosotros no trataremos. El método explicado en este apéndice se basa en la misma idea que el antiguo método propuesto por Daniel Bernoulli para cualquier ecuación algebraica y tiene los mismos defectos de convergencia lenta cuando las raíces no son numéricamente muy distintas. La lenta convergencia que a veces ocurre se compensa por el hecho de que los errores accidentales de cómputo solamente retardan el proceso pero no influyen en el resultado final. La simplicidad de cálculo es otra ventaja especialmente apreciable cuando el trabajo se confía a un grupo de calculistas. Probablemente éstas son las razones por las cuales muchos ingenieros usan este método con preferencia a otros.

El defecto de una convergencia lenta puede remediarse, en cierta manera, por el siguiente procedimiento que lleva a usar $2n$ iteraciones en lugar de m.

Refiriéndonos a la expresión

$$c_i^{(m)} = \gamma_1 \alpha_i \lambda_1^m + \gamma_2 \beta_i \lambda_2^m + \dots + \gamma_n \nu_i \lambda_n^m$$

y a las relaciones de ortogonalidad [12], es fácil encontrar que

$$\Gamma_m = c_1^{(m)} c_1^{(m+1)} + c_2^{(m)} c_2^{(m+1)} + \dots + c_n^{(m)} c_n^{(m+1)}$$

$$\Delta_m = c_1^{(m)} c_1^{(m)} + c_2^{(m)} c_2^{(m)} + \dots + c_n^{(m)} c_n^{(m)}$$

tendrán las expresiones sencillas siguientes

$$\Gamma_m = \gamma_1^2 \lambda_1^{2m+1} + \gamma_2^2 \lambda_2^{2m+1} + \dots + \gamma_n^2 \lambda_n^{2m+1}$$

$$\Delta_m = \gamma_1^2 \lambda_1^{2m} + \gamma_2^2 \lambda_2^{2m} + \dots + \gamma_n^2 \lambda_n^{2m},$$

de donde el cociente

$$\frac{\Gamma_m}{\Delta_m}$$

será aproximadamente igual a la mayor raíz λ_1, y es fácil ver que

$$\frac{\Gamma_m}{\Delta_m} < \lambda_1 .$$

Ejemplo. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comenzando con

$$c_1^{(0)} = 1 \quad ; \quad c_2^{(0)} = 0 \quad ; \quad c_3^{(0)} = 0$$

calculamos rápidamente por recurrencia

$$c_1^{(10)} = 14041 \quad ; \quad c_2^{(10)} = -17460 \quad ; \quad c_3^{(10)} = 7753 \; ;$$

$$c_1^{(11)} = 45542 \quad ; \quad c_2^{(11)} = -56714 \quad ; \quad c_3^{(11)} = 25213 \; ;$$

de donde

$$\Gamma_{10} = 1825158051$$

$$\Delta_{10} = 562110290$$

y

$$\frac{\Gamma_{10}}{\Delta_{10}} = 3{,}246975 \, ,$$

mientras que la mayor raíz característica de la matriz A es

$$3,2469795 \, ,$$

de manera que la aproximación, aun después de un número tan reducido de pasos, es bastante satisfactoria.

APENDICE V

EL METODO DE GRAEFFE

1. Cuando es necesario calcular todas las raíces de una ecuación, incluyendo las imaginarias, el así llamado método del cuadrado de las raíces o de Graeffe es preferible a los demás y es el único método práctico para calcular las raíces imaginarias. Las primeras ideas de este método se encuentran en los escritos de Waring en el siglo XVIII. Más tarde fué propuesto independientemente por Dandelin (1826) y Lobatchevsky (1834) un método para el cálculo de las raíces basado en la misma idea, pero sólo Graeffe (1837) lo desarrolló en todos sus detalles.

Sea

$$f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_n x^n = 0,$$

la ecuación propuesta, con raíces $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. La primera parte del método de Graeffe es un algoritmo para la formación de la ecuación con las raíces $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha^2_n$. Como

$$f(x) = p_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

$$(-1)^n f(-x) = p_n (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_n)$$

y multiplicando estas ecuaciones miembro a miembro, tenemos

$$(-1)^n f(x) f(-x) = p_n^2 (x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2) \dots (x^2 - \alpha_n^2),$$

de manera que, reemplazando x por $\sqrt{x}$, la ecuación pedida, de raíces $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2$ puede escribirse así:

$$F(x) = f(\sqrt{x}) f(-\sqrt{x}) = 0.$$

Ahora

$$f(\sqrt{x}) = p_0 + p_2 x + p_4 x^2 + \dots + \sqrt{x}(p_1 + p_3 x + p_5 x^2 + \dots),$$

$$f(-\sqrt{x}) = p_0 + p_2 x + p_4 x^2 + \dots - \sqrt{x}(p_1 + p_3 x + p_5 x^2 + \dots),$$

y luego

$$F(x) = (p_0 + p_2 x + p_4 x^2 + \dots)^2 - x(p_1 + p_3 x + p_5 x^2 + \dots)^2,$$

de donde es fácil ver que el coeficiente de x^i en $F(x)$ será:

$$(-1)^i [p_i^2 - 2 p_{i-1} p_{i+1} + 2 p_{i-2} p_{i+2} - \dots],$$

continuándose los términos entre paréntesis mientras los subíndices de las letras p no sean negativos o mayores que n. Se obtiene una simplificación cambiando x por $-x$ en $F(x)$, es decir, considerando la ecuación cuyas raíces son: $-\alpha_1^2$; $-\alpha_2^2$; ... ; $-\alpha_n^2$. En este caso, tenemos la siguiente regla uniforme: Escribiendo la ecuación original en la forma

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 ,$$

el coeficiente de x^{n-1} en la ecuación transformada, cuyas raíces son $-\alpha_1^2$; $-\alpha_2^2$; ... ; $-\alpha_n^2$, está expresado por la suma

$$a_i^2 - 2\, a_{i-1}\, a_{i+1} + 2\, a_{i-2}\, a_{i+2} - \ldots$$

que se continúa mientras los índices no se hacen negativos o mayores que n.

Por una repetición del mismo proceso, se obtienen ecuaciones transformadas cuyas raíces son

$$\begin{array}{l} -\alpha_1^4 \;;\; -\alpha_2^4 \;;\; \ldots \;;\; -\alpha_n^4 \;; \\ -\alpha_1^8 \;;\; -\alpha_2^8 \;;\; \ldots \;;\; -\alpha_n^8 \;; \\ -\alpha_1^{16} \;;\; -\alpha_2^{16} ;\; \ldots \;;\; -\alpha_n^{16} \;; \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

es decir, las opuestas de las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, elevadas a exponentes que son potencias de dos rápidamente crecientes. Luego de algunas de estas operaciones los coeficientes de las ecuaciones transformadas se hacen excesivamente grandes y es necesario reemplazarlos por valores aproximados reteniendo un cierto número fijo de cifras significativas, por ejemplo, cinco o seis. Reteniendo generalmente, por ejemplo, seis cifras, se puede esperar obtener raíces por el método de Graeffe también con seis cifras significativas. Los cálculos se realizan convenientemente con la ayuda de una máquina de calcular. Otra forma de evitar el uso de números muy grandes es reemplazar los coeficientes de la ecuación transformada por sus logaritmos (o mejor, por el logaritmo de sus valores absolutos) agregando una letra n al final del logaritmo para indicar un coeficiente negativo. Los coeficientes de las ecuaciones transformadas serán todos positivos si la ecuación propuesta tiene solamente raíces reales, de manera que los coeficientes negativos indican la presencia de raíces imaginarias, aun cuando la recíproca no es cierta necesariamente. Cuando se usan los valores logarítmicos de los coeficientes, es de mucha ayuda tener tablas de logaritmos de Gauss que permiten tomar directamente de la tabla el logaritmo de la suma o diferencia de dos números cuyos logaritmos son dados. La excelente tabla de logaritmos a seis decimales de Bremiker contiene también tablas de logaritmos de Gauss.

Ejemplo 1. Sea la ecuación propuesta

$$x^4 + 2\,x^3 - 6\,x^2 - 2\,x + 1 = 0.$$

Los coeficientes de las primeras tres ecuaciones transformadas se han calculado exactamente de acuerdo con lo anterior y se consignan en la siguiente tabla:

2^0	1	2	—6	—2	1
2^1	1	16	46	16	1
2^2	1	164	1606	164	1
2^3	1	23684	2525446	23684	1

Los números de la columna de la izquierda muestran los exponentes de las potencias a las que han sido elevadas las raíces. Al pasar a las siguientes ecuaciones transformadas retendremos solamente seis cifras significativas. Los resultados son los siguientes:

2^4	1	555881×10^3	637676×10^7	555881×10^3	1
2^5	1	308991×10^{12}	406631×10^{0}	308991×10^{12}	1

Para la ecuación transformada siguiente los coeficientes dentro de la aproximación supuesta serían iguales a los cuadrados de los coeficientes precedentes: una circunstancia importante relacionada con el método de Graeffe que demuestra que no es necesario continuar más el cálculo.

Ejemplo 2. Sea la ecuación propuesta

$$x^4 + 8\,x^3 - 7\,x^2 - 50\,x - 30 = 0.$$

Los coeficientes de la primera ecuación transformada, calculados directamente:

2^1: 1 78 789 2080 900

son reemplazados por sus logaritmos:

2^1: 0 1,892095 2,897077 3,318063 2,954243

Los cálculos siguientes, hechos con ayuda de las tablas logarítmicas de Bremiker, dan:

2^2	0	3,653792	5,476891	6,463324	5,908486
2^3	0	7,294564	10,804246	12,900923	11,816972
2^4	0	14,588985	21,573568	25,801272	23,633944
2^5	0	29,177970	43,145614	51,602544	47,267888

En el paso siguiente todos los logaritmos se duplicarían así que, con la aproximación deseada, no es necesario continuar más.

2. De manera de poder explicar cómo el proceso descripto en el Párrafo 1 puede ser usado para el cálculo de las raíces, comenzaremos con el

caso más simple cuando las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todas reales y de distinto valor absoluto. Llamando en general ρ_k a $|\alpha_k|$, supóngase que

$$\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_n .$$

Llámese $A_0, A_1, \ldots, A_n$ a los coeficientes de la ecuación transformada correspondiente al grado $m = 2^h$ de las raíces. Entonces evidentemente es

$$\frac{A_1}{A_0} = \Sigma\, \rho_1{}^m \quad ; \quad \frac{A_2}{A_0} = \Sigma\, \rho_1{}^m \rho_2{}^m \quad ; \quad \frac{A_3}{A_0} = \Sigma\, \rho_1{}^m \rho_2{}^m \rho_3{}^m \; ; \ldots$$

En estas sumas los términos $\rho_1{}^m$, $\rho_1{}^m \rho_2{}^m$, $\rho_1{}^m \rho_2{}^m \rho_3{}^m$, ... son los términos dominantes y los otros términos serán incomparablemente menores si m es un número suficientemente grande. Entonces, con pequeños errores relativos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ podemos escribir

$$\frac{A_1}{A_0} = \rho_1{}^m (1 + \varepsilon_1) \quad ; \quad \frac{A_2}{A_0} = \rho_1{}^m \rho_2{}^m (1 + \varepsilon_2) \quad ;$$

$$\frac{A_3}{A_0} = \rho_1{}^m \rho_2{}^m \rho_3{}^m (1 + \varepsilon_3) ; \ldots$$

de donde, con pequeños errores

$$m \log \rho_1 = \log \frac{A_1}{A_0} \; ; \; m \log \rho_1 \rho_2 = \log \frac{A_2}{A_0} \; ; \; m \log \rho_1 \rho_2 \rho_3 = \log \frac{A_3}{A_0}$$

y con errores aún más pequeños (debido al divisor m grande):

$$\log \rho_1 = \frac{1}{m} \log \frac{A_1}{A_0} \; ; \log \rho_1 \rho_2 = \frac{1}{m} \log \frac{A_2}{A_0} \; ;$$

$$\log \rho_1 \rho_2 \rho_3 = \frac{1}{m} \log \frac{A_3}{A_0} \; ; \ldots \qquad [1]$$

Pasando a la siguiente ecuación transformada, cuyos coeficientes son $A_0', A_1', \ldots$ tenemos también

$$\frac{A_1'}{A_0'} = \rho_1{}^{2m} (1 + \varepsilon_1') \quad ; \quad \frac{A_2'}{A_0'} = (\rho_1 \rho_2)^{2m} (1 + \varepsilon_2') \quad ;$$

$$\frac{A_3'}{A_0'} = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{2m} (1 + \varepsilon_3') \; ; \ldots$$

o, con errores relativos pequeños:

$$\frac{A_1'}{A_0'} = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 \quad ; \quad \frac{A_2'}{A_0'} = \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \quad ; \quad \frac{A_3'}{A_0'} = \left(\frac{A_3}{A_0}\right)^2 ; \ldots$$

que explica, en general, el fenómeno observado en los dos ejemplos precedentes. Recíprocamente, cuando se satisfacen estas ecuaciones den-

tro del grado de aproximación prescripto, puede suponerse sin temor a error que por lo menos con la misma aproximación se cumplirán las ecuaciones [1]. Habiéndose encontrado en [1] los logaritmos de los módulos ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... estos módulos se determinan inmediatamente por las tablas logarítmicas. Con respecto al signo de la raíz se podrá encontrar sin dificultad si se conoce groseramente la ubicación de las raíces.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0,$$

vista en el Ejemplo 1, Párrafo 1. Los coeficientes de la quinta ecuación transformada son

$$1 \quad 308991 \times 10^{12} \quad 406631 \times 10^{20} \quad 308991 \times 10^{12} \quad 1$$

y sus logaritmos

$$0 \quad 17{,}489945 \quad 25{,}609200 \quad 17{,}489945 \quad 0$$

de donde

$$32 \log \rho_1 = 17{,}489945 \qquad 32 \log \rho_1 \rho_2 = 25{,}609200$$

$$32 \log \rho_1 \rho_2 \rho_3 = 17{,}489945 \qquad 32 \log \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 = 0$$

y, en consecuencia:

$$\log \rho_1 = 0{,}546561 \; ; \; \log \rho_2 = 0{,}253727 \; ; \; \log \rho_3 = \bar{1}{,}746273 \; ; \; \log \rho_4 = \bar{1}{,}453439$$

$$\rho_1 = 3{,}520150 \; ; \; \rho_2 = 1{,}793604 \; ; \; \rho_3 = 0{,}557536 \; ; \; \rho_4 = 0{,}284079.$$

Con una noción somera de la ubicación de las raíces se encuentra que son

$$\begin{array}{rr} & -3{,}520150 \\ & +1{,}793604 \\ & -0{,}557536 \\ & +0{,}284079 \\ \hline \text{Suma:} & -2{,}000003 \end{array}$$

en lugar de -2. Presentada la ecuación en la forma

$$(x^2 + x - 1)^2 = 5x^2,$$

es fácilmente resoluble y sus raíces son:

$$\frac{\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{10 - \sqrt{20}}}{2} \; ; \; \frac{-\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{10 + \sqrt{20}}}{2}$$

o aproximadamente

$$\begin{array}{r} -3{,}5201470 \\ +1{,}7936045 \\ -0{,}5575365 \\ +0{,}2840790 \end{array}$$

Los valores anteriores son tan próximos a éstos como podía esperarse del uso de tablas de logaritmos de seis decimales.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 50x - 30 = 0\,,$$

ya vista en el Ejemplo 2, Párrafo 1. Los logaritmos de los coeficientes de la quinta ecuación transformada son:

$$0 \qquad 29{,}177970 \qquad 43{,}145609 \qquad 51{,}602544 \qquad 47{,}267888$$

de donde

$$\begin{array}{r} 43{,}145609 \\ -\underline{29{,}177970} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 51{,}602544 \\ -\underline{43{,}145609} \end{array}$$

$$32 \log \rho_1 = 29{,}177970 \;;\; 32 \log \rho_2 = 13{,}967639 \qquad 32 \log \rho_3 = 8{,}456935$$

$$\begin{array}{r} 47{,}267888 \\ -\underline{51{,}602544} \end{array}$$

$$32 \log \rho_4 = \bar{5}{,}665344$$

y, por lo tanto:

$$\log \rho_1 = 0{,}911812 \;;\; \rho_1 = 8{,}16228$$
$$\log \rho_2 = 0{,}436489 \;;\; \rho_2 = 2{,}73204$$
$$\log \rho_3 = 0{,}264279 \;;\; \rho_3 = 1{,}83772$$
$$\log \rho_4 = \bar{1}{,}864542 \;;\; \rho_4 = 0{,}73205$$

Sin mucho inconveniente se determina que las raíces son:

$$\begin{array}{r} -8{,}16228 \\ +2{,}73205 \\ -1{,}83772 \\ -\underline{0{,}73205} \\ -8{,}00000 \end{array}$$

3. En general, agrupemos los módulos de las raíces $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ en grupos tales que

$$\rho_1 \geqq \rho_2 \geqq \cdots \geqq \rho_\lambda$$
$$\rho_{\lambda+1} \geqq \rho_{\lambda+2} \geqq \cdots \geqq \rho_\mu$$
$$\rho_{\mu+1} \geqq \rho_{\mu+2} \geqq \cdots \geqq \rho_\nu$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

pero tal que

$$\rho_\lambda > \rho_{\lambda+1} \;;\; \rho_\mu > \rho_{\mu+1} \;;\; \rho_\nu > \rho_{\nu+1} \;;\; \ldots$$

En las expresiones

$$\frac{A_\lambda}{A_0} = \Sigma\, \alpha_1{}^m \alpha_2{}^m \ldots \alpha_\lambda{}^m \;;\quad \frac{A_\mu}{A_0} = \Sigma\, \alpha_1{}^m \alpha_2{}^m \ldots \alpha_\mu{}^m \;;$$
$$\frac{A_\nu}{A_0} = \Sigma\, \alpha_1{}^m \alpha_2{}^m \ldots \alpha_\nu{}^m \;;\; \ldots$$

los términos $\alpha_1^m \alpha_2^m \ldots \alpha_\lambda^m$; $\alpha_1^m \alpha_2^m \ldots \alpha_\mu^m$; $\alpha_1^m \alpha_2^m \ldots \alpha_\nu^m$; ... son dominantes y los otros términos incomparablemente menores para m grande. Luego, con errores relativos arbitrarios y pequeños $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$

$$\frac{A_\lambda}{A_0} = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\lambda)^m (1 + \varepsilon_1) \quad ; \quad \frac{A_\mu}{A_0} = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\mu)^m (1 + \varepsilon_2) \quad ;$$

$$\frac{A_\nu}{A_0} = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu)^m (1 + \varepsilon_3) \; ; \ldots$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{A_\lambda}{A_0} = (\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_\lambda)^m (1 + \varepsilon_1) \quad ; \quad \frac{A_\mu}{A_0} = (\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_\mu)^m (1 + \varepsilon_2) \; ; \ldots$$

de donde, nuevamente con pequeños errores

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_\lambda = \frac{1}{m} \log \frac{A_\lambda}{A_0} \quad ; \quad \rho_{\lambda+1} \ldots \rho_\mu = \frac{1}{m} \log \frac{A_\mu}{A_\lambda} \; ;$$

$$\rho_{\mu+1} \ldots \rho_\nu = \frac{1}{m} \log \frac{A_\nu}{A_\mu} \; ; \ldots \qquad [2]$$

y estas relaciones se satisfarán dentro de la aproximación prescripta cuando las transformaciones se continúen de manera que los logaritmos de las razones

$$\frac{A_\lambda}{A_0} \; ; \; \frac{A_\mu}{A_0} \; ; \; \frac{A_\nu}{A_0} \; ; \ldots$$

comiencen a duplicarse de una ecuación transformada a la siguiente. La sucesión de los coeficientes

$$A_0 \; ; \; A_1 \; ; \; A_2 \ldots$$

dividida en secciones

$$A_0, \ldots, A_\lambda$$
$$A_\lambda, \ldots, A_\mu$$
$$A_\mu, \ldots, A_\nu$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

cuyos extremos muestran una regularidad de comportamiento en que las razones

$$\frac{A_\lambda}{A_0} \; ; \; \frac{A_\mu}{A_0} \; ; \; \frac{A_\nu}{A_0} \; ; \ldots$$

tienen tendencia a elevarse al cuadrado o sus logaritmos a duplicarse cuando se pasa de una transformada a la siguiente, mientras que los

términos intermedios no manifiestan tal comportamiento regular. En la práctica por lo tanto, es siempre fácil encontrar mientras se ejecutan las transformaciones, los valores de los índices λ, μ, ν, ... De las ecuaciones [2] se pueden hallar valores aproximados de los productos de los módulos $\rho_1, \ldots, \rho_\lambda$; $\rho_{\lambda+1} \ldots \rho_\mu$; ... de cada grupo. Para ver cómo ayuda ésto a encontrar aproximadamente el módulo de las raíces reales e imaginarias, supóngase por ejemplo, que entre las raíces

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6$$

de una ecuación de sexto grado, ordenadas en sentido decreciente de sus módulos, α_1 es raíz real, α_2 y α_3 imaginarias conjugadas, α_4 real y α_5 y α_6 imaginarias conjugadas de manera que tres de ellas no tengan el mismo módulo. Entonces

$$\rho_1 > \rho_2 = \rho_3 > \rho_4 > \rho_5 = \rho_6$$

y para m grande la sucesión de los coeficientes

$$A_0\ ;\ A_1\ ;\ A_2\ ;\ A_3\ ;\ A_4\ ;\ A_5\ ;\ A_6$$

se encontrará que se divide en secciones

$$\begin{aligned} &A_0\ ,\ A_1 \\ &A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3 \\ &A_3\ ,\ A_4 \\ &A_4\ ,\ A_5\ ,\ A_6\,. \end{aligned}$$

Suponiendo por simplicidad que $A_0 = 1$, los coeficientes A_1, A_3, A_4, A_6 mostrarán un comportamiento regular como se dijo antes, pero A_2 y A_5, en general, variarán erráticamente, cambiando de signo y mostrando la considerable influencia de los coeficientes vecinos A_1, A_3 y A_4, A_5. Una vez que la partición se ha manifestado, los módulos de las raíces reales ρ_1, ρ_4 se encuentran aproximadamente con

$$\log \rho_1 = \frac{1}{m} \log \frac{A_1}{A_0}\ \ ;\ \ \log \rho_4 = \frac{1}{m} \log \frac{A_4}{A_3},$$

y los cuadrados de los módulos de las raíces imaginarias con

$$\log \rho_2^2 = \frac{1}{m} \log \frac{A_3}{A_1}\ \ ;\ \ \log \rho_5^2 = \frac{1}{m} \log \frac{A_6}{A_4}.$$

El procedimiento ilustrado en este ejemplo servirá para encontrar los módulos de las raíces reales e imaginarias excluyendo el caso de dos o más raíces de módulos iguales (o muy próximos) que requiere la aplicación de artificios especiales.

4. Cuando los módulos de las raíces se encuentran por aproximaciones, los signos de las raíces reales son fácilmente determinables y los argumentos (o componentes reales) de las raíces imaginarias pueden determinarse de la siguiente manera: Supóngase primero que hay un par de raíces imaginarias $a \pm bi$ cuyo módulo es ρ. Si la suma de las raíces reales se indica con σ, las componentes reales e imaginarias se determinan de

$$2\,a = -\frac{a_1}{a_0} - \sigma \quad ; \quad b = \sqrt{\rho^2 - a^2}$$

Cuando hay dos raíces imaginarias $a_1 \pm b_1 i$; $a_2 \pm b_2 i$ de módulos desiguales ρ_1, ρ_2, considérense las sumas de todas las raíces y de sus recíprocas; llamando σ y σ' la suma de las raíces reales y la de sus recíprocas, tenemos dos ecuaciones

$$2\,a_1 + 2\,a_2 = -\frac{a_1}{a_0} - \sigma \quad ; \quad \frac{2\,a_1}{\rho_1^2} + \frac{2\,a_2}{\rho_2^2} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \sigma'$$

que sirven para determinar a_1 y a_2 luego de lo cual se encuentran b_1 y b_2 de

$$b_1 = \sqrt{\rho_1^2 - a_1^2} \quad ; \quad b_2 = \sqrt{\rho_2^2 - a_2^2}\,.$$

En el caso en que hubiera tres o más pares de raíces imaginarias de distinto módulo puede usarse el siguiente procedimiento general: Podemos suponer que el grado de la ecuación propuesta $f(x) = 0$ es par e igual a 2ν; pues en caso contrario puede reemplazarse por $xf(x) = 0$. Sea ρ el módulo de alguna raíz imaginaria y ϕ su argumento. Sustituyendo $x = \rho(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)$ en

$$x^{-\nu} f(x) = 0$$

e igualando a cero las partes reales e imaginarias, tenemos dos relaciones de la forma

$$C_0 \cos \nu\phi + C_1 \cos(\nu - 1)\phi + \ldots + C_{\nu-1} \cos\phi + C_\nu = 0\,,$$
$$D_0 \operatorname{sen} \nu\phi + D_1 \operatorname{sen}(\nu - 1)\phi + \ldots + D_{\nu-1} \operatorname{sen}\phi = 0\,,$$

donde los coeficientes son cantidades conocidas. Reemplazando en general:

$$\cos k\phi \quad ; \quad \frac{\operatorname{sen} k\phi}{\operatorname{sen}\phi}$$

por sus expresiones en la variable $t = \cos\phi$ encontramos que t es la única raíz común a las ecuaciones

$$F(t) = 0 \;;\; \Phi(t) = 0$$

una de grado ν y otra de grado $\nu - 1$. Esta raíz común puede encontrarse por el método usado al determinar el máximo común divisor. El cálculo se realiza convenientemente si se dispone de máquina de calcular.

Existe otro método para calcular las componentes reales de las raíces imaginarias. Tómese un número real k (que por razones prácticas no debe ser ni muy pequeño ni muy grande) y transfórmese la ecuación propuesta mediante la sustitución

$$y = x - k .$$

Haciendo

$$|\alpha_\nu| = \rho_\nu \quad ; \quad |\alpha_\nu - k| = r_\nu \quad ; \quad \alpha_\nu = a_\nu + b_\nu i$$

tenemos

$$a_\nu^2 + b_\nu^2 = \rho_\nu^2 \quad : \quad (a_\nu - k)^2 + b_\nu^2 = r_\nu^2$$

de donde

$$a_\nu = \frac{\rho_\nu^2 - r_\nu^2 + k^2}{2\,k} .$$

Los cuadrados de los módulos de la ecuación en y se determinarán por una nueva aplicación del método de Graeffe; sean éstos

$$r^2 \;;\; s^2 \;;\; t^2 \;; \ldots$$

Como los signos de las raíces reales α_ν se conocen, no hay dificultad en encontrar los correspondientes r_ν. Si la menor diferencia entre los módulos de raíces imaginarias no conjugadas es menor en valor absoluto que $2\,k$ es fácil ver que con $\rho_\nu > \rho_\mu$ tenemos también $r_\nu > r_\mu$ y luego los valores r_ν para las raíces imaginarias pueden encontrarse sin ambigüedad entre r^2, s^2, t^2, ... Pero los valores de k que satisfacen la condición anterior pueden ser tan pequeños como para causar una considerable pérdida de aproximación en la determinación de a_ν. Con un valor de k mayor, la identificación de r_ν correspondiente a ρ_ν puede lograrse mediante un proceso de tanteos fácilmente aplicable en la práctica, que se basa en la desigualdad

$$|\rho_\nu - r_\nu| > |k|$$

y la relación

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu^2 - k^2}{\rho_\nu^2} = 2\,k\,\frac{a_{n-1}}{a_n} + n$$

que se deduce de la expresión de la suma de las recíprocas de las raíces, tomando en cuenta la expresión anterior de a_ν.

5. Vale la pena ilustrar estas consideraciones generales por medio de ejemplos numéricos.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - 22x^2 + x + 1 = 0.$$

Los resultados del cálculo, que el lector debe repetir, se dan en la siguiente tabla:

2^0	1	1	−7	−22	1	1
2^1	1	15	95	500	45	1
2^2	1	35	−5885	241480	1025	1
2^3	1	12995	177317×10^2	583247×10^5	567665	1
2^4	1	133407×10^3	-120145×10^{10}	340177×10^{16}	205594×10^6	1
2^5	1	202003×10^{11}	53584×10^{25}	115720×10^{38}	354654×10^{17}	1
2^6	1	406980×10^{27}	-180391×10^{54}	133911×10^{81}	123468×10^{40}	1
2^7	*	*	*	*	152409×10^{85}	1

El comportamiento irregular del tercer coeficiente indica la presencia de raíces imaginarias. Luego de seis transformaciones la partición se torna manifiesta y los grupos en que se separan los coeficientes son los siguientes:

$$\begin{array}{lll} 1 & 406980\times10^{27} & \\ 406980\times10^{27} & -180391\times10^{54} & 133911\times10^{81} \\ 133911\times10^{81} & 123468\times10^{40} & \\ 123468\times10^{40} & 1 & \end{array}$$

Esto indica la existencia de tres raíces reales y dos imaginarias. Recurriendo a los logaritmos encontramos

$$\log 406980\times10^{27} = 32{,}609573\,, \quad \log 133911\times10^{81} = 86{,}126816,$$
$$\log 123468\times10^{40} = 45{,}091554\,,$$

de donde

$$64\log\rho_1 = 32{,}609573\,, \quad 64\log\rho_2^2 = 53{,}517243\,,$$
$$64\log\rho_4 = -41{,}035262\,, \quad 64\log\rho_5 = -45{,}091554\,,$$

y

$$\log\rho_1 = 0{,}509524\,, \quad \log\rho_4 = \bar{1}{,}358824\,, \quad \log\rho_5 = \bar{1}{,}295444\,,$$
$$\rho_1 = 3{,}23239\,, \quad \rho_4 = 0{,}228476\,, \quad \rho_5 = 0{,}197445\,,$$

que lleva a las siguientes raíces reales:

$$+3{,}23239\ ;\ +0{,}22847\ ;\ -0{,}19745\,.$$

El logaritmo del cuadrado de los módulos de las dos raíces imaginarias es

$$\log\rho_2^2 = 0{,}836207\,,$$

y así, llamándolo simplemente ρ^2, tenemos

$$\rho^2 = 6{,}85815\,.$$

Considerando la suma de todas las raíces tenemos

$$3{,}26341 + 2\,a = -1\,,$$

de donde

$$a = -2{,}131705\,,$$

y

$$b = 1{,}52117\,,$$

de manera que las raíces imaginarias son

$$-2{,}131705 \pm 1{,}52117\,i\,.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x^5 - x^3 - 2\,x^2 - 2\,x - 1 = 0$$

Los resultados del cálculo se dan en la tabla:

2^0	1	0	—1	—2	—2	—1
2^1	1	2	—3	0	0	1
2^2	1	10	9	4	0	1
2^3	1	82	1	36	—8	1
2^4	1	6722	—5919	1476	—8	1
2^5	1	451971×10^2	151912×10	209732×10	—2888	1
2^6	1	204278×10^{10}	41187×10^9	448658×10^7	414590×10	1
2^7	*	*	*	$201291 \times 10^{\,0}$	*	*

El comportamiento irregular de los números de la tercera y quinta columnas indica dos pares de raíces imaginarias. La partición es casi completa después de seis transformaciones y la séptima es necesaria solamente para efectuar un pequeño ajuste en el número de la cuarta columna. Tomando logaritmos y dividiendo el logaritmo del número de la cuarta columna por 2, tenemos las siguientes secciones de los coeficientes logarítmicos:

0	15,310222	
15,310222	*	12,651912
12,651912	*	0

de donde

$$64 \log \rho_1 = 15{,}310222\ ;\ 64 \log \rho_2^2 = 61{,}341690 - 64\ ;\ 64 \log \rho_4^2 = 51{,}348096 - 64\,,$$

$$\log \rho_1 = 0{,}239222\,, \qquad \log \rho_2^2 = \bar{1}{,}958464\,, \qquad \log \rho_4^2 = \bar{1}{,}802314\,,$$

$$\rho_1 = 1{,}73469\,, \qquad \rho_2^2 = 0{,}908790\,, \qquad \rho_4^2 = 0{,}634329\,.$$

La raíz real es

$$1{,}73469\,,$$

y los cuadrados de los módulos de las raíces imaginarias, que llamamos simplemente ρ^2 y ρ'^2, son

$$\rho^2 = 0{,}908790\ ;\ \rho'^2 = 0{,}634329\,.$$

Considerando la suma de todas sus raíces y de sus recíprocas, tenemos dos ecuaciones

$$a + a' = -0{,}86735$$

$$\frac{a}{\rho^2} + \frac{a'}{\rho'^2} = -1{,}28824$$

cuyas soluciones llevan a

$$a = -0{,}16616\,, \quad a' = -0{,}70119\,,$$

y además,

$$b = 0{,}93871\,, \quad b' = 0{,}37770\,,$$

de manera que las raíces imaginarias son

$$-0{,}16616 \pm 0{,}93871\,i\,,$$
$$-0{,}70119 \pm 0{,}37770\,i\,.$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$x^6 - x^5 + 2\,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1 = 0.$$

Luego de tres transformaciones los cálculos se realizan logarítmicamente y los resultados se consignan en la tabla:

2^0	1	—1	2	—3	2	1	1
2^1	1	—3	2	—3	14	—3	1
2^2	1	5	14	—31	182	—19	1
2^3	1	—3	870	—4327	31974	—3	1
2^4	0	0,477121 *n*	2,939519	3,636187 *n*	4,504797	0,477121 *n*	0
2^5	0	3,238297 *n*	5,900305	7,567165 *n*	9,009583	4,805766 *n*	0
2^6	0	6,148167	11,704236	14,419561 *n*	18,019162	9,310391	0
2^7	0	11,985109	23,409727	29,995115 *n*	36,038324	*	0
2^8	*	*	46,819467	*	*	*	*

La partición queda casi completa luego de seis transformaciones y la séptima se requiere solamente para hacer un pequeño ajuste en la tercera columna. Dividiendo el último número de esta columna por 2, tenemos las siguientes secciones depués de seis transformaciones:

0	*	23,409733
23,409733	*	36,038324
36,038324	*	0

Esto indica la presencia de seis raíces imaginarias. Los logaritmos de los cuadrados de sus módulos son:

$$\log \rho_1{}^2 = 0{,}365777 \ ; \ \log \rho_2{}^2 = 0{,}197321 \ ; \ \log \rho_3{}^2 = \bar{1}{,}436901\,,$$
$$\rho_1{}^2 = 2{,}32154\,, \qquad \rho_2{}^2 = 1{,}57515\,, \qquad \rho_3{}^2 = 0{,}273464\,.$$

Para determinar los argumentos escribimos la ecuación propuesta en la forma

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\,x + \frac{2}{x} - 3 = 0\,,$$

e introducimos

$$x = \rho\,(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi).$$

Igualando a cero las componentes reales e imaginarias tenemos

$$\left(\rho_3 + \frac{1}{\rho^3}\right)\cos 3\,\phi + \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho^2\right)\cos 2\,\phi + 2\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\phi - 3 = 0\,,$$

$$\left(\rho^3 - \frac{1}{\rho^3}\right)\operatorname{sen} 3\,\phi - \left(\frac{1}{\rho^2} + \rho^2\right)\operatorname{sen} 2\,\phi + 2\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\phi = 0\,,$$

y reemplazando $t = \cos\phi$

$$F\,(t) = 4\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)t^3 - 2\left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)t^2 + \left[2\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - 3\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)\right]t + \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} - 3 = 0\,,$$

$$\phi\,(t) = 4\left(\rho^3 - \frac{1}{\rho^3}\right)t^2 - 2\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)t + 2\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) - \left(\rho^3 - \frac{1}{\rho^3}\right) = 0.$$

Sustituyendo aquí $\rho = \rho_1$ y reduciendo los coeficientes de la máxima potencia de t a 1, tenemos

$$t^3 - 0{,}247490\,t^2 - 0{,}464659\,t - 0{,}072593 = 0$$

$$t^2 - 0{,}422840\,t - 0{,}116748 = 0$$

y la raíz común de estas ecuaciones, determinadas por el método del máximo común divisor es:

$$t = \cos\phi_1 = -0{,}190386$$

y

$$a_1 = \rho_1 \cos\phi_1 = -0{,}290083.$$

Similarmente, se encuentra para los otros dos pares de raíces complejas

$$a_2 = 1{,}08018\,, \qquad a_3 = 0{,}290093.$$

Finalmente, las componentes imaginarias de estas raíces son

$$1{,}49579 \quad ; \quad 0{,}63903 \quad ; \quad 0{,}43510,$$

de manera que las seis raíces imaginarias pedidas son

$$-0{,}29008 \pm 1{,}49579\,i$$

$$1{,}08018 \pm 0{,}63903\,i$$

$$-0{,}29009 \pm 0{,}43510\,i$$

y su suma resulta ser 1,00002 en lugar de 1, lo que sugiere que solamente la última cifra decimal puede adolecer de algún error.

Para verificar estos números podemos usar el segundo método explicado en la pág. 362. Con este fin tomamos $k = 1$ y transformamos la ecuación

$$x^6 - x^5 + 2\,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x^2 + x + 1 = 0$$

mediante la sustitución $y = x - 1$; la ecuación transformada en y será

$$y^6 + 5\,y^5 + 12\,y^4 + 15\,y^3 + 10\,y^2 + 5\,y + 3 = 0.$$

Luego de cinco pasos los coeficientes de la ecuación transformada se separan en las siguientes secciones:

$$\begin{array}{ccc} 1 & -408929 \times 10^4 & 832061 \times 10^{13} \\ 832061 \times 10^{13} & -178969 \times 10^{18} & 314087 \times 10^{22} \\ 314087 \times 10^{22} & -317600 \times 10^{16} & 185302 \times 10^{10} \end{array}$$

de donde se deduce que los cuadrados de los módulos de las raíces imaginarias son:

$$3{,}90171 \quad ; \quad 1{,}85365 \quad ; \quad 0{,}414800.$$

Con la ayuda de la relación

$$\frac{r_1^2 - 1}{\rho_1^2} + \frac{r_2^2 - 1}{\rho_2^2} + \frac{r_3^2 - 1}{\rho_3^2} = 4,$$

se encuentra fácilmente que en correspondencia con

$$\rho_1^2 = 2{,}32154 \quad ; \quad \rho_2^2 = 1{,}57515 \quad ; \quad \rho_3^2 = 0{,}273464,$$

debemos tomar

$$r_1^2 = 3{,}90171 \quad ; \quad r_2^2 = 0{,}41480 \quad ; \quad r_3^2 = 1{,}85365.$$

De donde

$$a_1 = \frac{3{,}32154 - 3{,}90171}{2} = -0{,}290085,$$

$$a_2 = \frac{2{,}57515 - 0{,}41480}{2} = 1{,}080175,$$

$$a_3 = \frac{1{,}27346 - 1{,}85365}{2} = -0{,}290095,$$

es decir, prácticamente los mismos valores obtenidos por el otro método. Un cálculo más preciso lleva a los siguientes valores de las raíces con siete decimales:

$$\begin{aligned} -0{,}2900809 &\pm 1{,}4957939\,i \\ 1{,}0801744 &\pm 0{,}6390402\,i \\ -0{,}2900935 &\pm 0{,}4350983\,i \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= 2{,}3215463 \\ \rho_2^2 &= 1{,}5751490 \\ \rho_3^2 &= 0{,}2734647. \end{aligned}$$

En esta exposición nos hemos limitado solamente a las características principales del método de Graeffe, dejando de lado cuestiones como el cálculo de raíces con el mismo o casi el mismo módulo, mejoramiento de los valores obtenidos, así como de la investigación teórica más profunda de todo el tema. Para ésto el lector puede consultar el extenso artículo de A. Ostrowski: *Recherches sur la méthode de Graeffe* en *Acta Mathematica,* vol. 72, 1940.

RESPUESTAS A EJERCICIOS

Capítulo I

§ 6. **1.** $-3-i$. **2.** $3+2i$. **3.** $5i$.

4. $-i$. **5.** $-1+i$. **6.** $1/2-1/2\,i$.

7. $3/2-1/2\,i$. **8.** $3/2-1/2\,i$. **9.** -2.

10. -1. **11.** -1. **12.** $3/8+3/8\,i$.

13. $x=1$; $y=2$. **14.** 1. **15.** $x=\pm 1$.

§ 7. **1.** 1. **2.** 1. **3.** 5.

4. 1. **5.** x^2+1. **6.** $2x^2-2x+1$.

7. x^3-x^2+x-1 si $x \geqq 1$; y $-x^3+x^2-x+1$ si $x<1$.

8. 0. **9.** $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

10. (*a*) 0; 1; $-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (*b*) 0; ± 1; $\pm i$.

§ 8. **2.** 1. **3.** (*a*) 1; (*b*) <1.

§ 9. **2.** 15 para $z=2$.

§ 10. **1.** $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. **2.** $\pm\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **3.** $\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.

4. $\pm(1-2i)$. **5.** $\pm(6-7i)$. **6.** $\pm(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$.

7. $\pm(x+i)$. **8.** $\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **9.** $\dfrac{3}{4}\pm i\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

10. $1+i$; $1+2i$. **11.** $-1+i$; $3/2+4i$. **12.** ± 1; $\pm i$.

13. $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. **14.** $\pm(1+i)$; $\pm(1-i)$.

15. $\pm\dfrac{5-i}{\sqrt{2}}$; $\pm\dfrac{1+5i}{\sqrt{2}}$. **16.** 1; $-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

17. $-i$; $\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$. **18.** ± 1; $-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

19. $\pm i$; $\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$; $\pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.

20. $\dfrac{-1+i}{\sqrt[3]{2}}$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{3} + (-1 \pm \sqrt{3})\, i}{2\sqrt[3]{2}}$.

22. (a) $x^2 + x + 1$; (b) $x^2 + 1 = 0$.

§ 12. 1. (a) $-60°$; (b) $+60°$; (c) $+120°$.

2. (a) $-90°$; (b) $+90°$; (c) $+45°$.

3. $+30°$.

4. $-80°$.

§ 13. 1. $4(\cos\pi + i \operatorname{sen} \pi)$.

2. $\cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$.

3. $6(\cos 3/2\,\pi + i \operatorname{sen} 3/2\,\pi)$.

4. $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

5. $\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°$.

6. $\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$.

7. $2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$.

8. $2\sqrt{2}\,(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)$.

9. $r = 5$; $\phi = 261°\,52'\,12''$.

10. $r = \sqrt{5}$; $\phi = 153°\,26'\,6''$.

11. $2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\right)$ si $-\pi < \alpha < \pi$.

12. $2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ si $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} > 0$ y

$$-2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left[\cos\left(\pi + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \text{ si } \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 0.$$

§ 14. 1. $2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

2. $8^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{12} - i \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{12}\right)$.

3. $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2} - n\phi\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2} - n\phi\right)$.

4. $2^n\left(\operatorname{sen}\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)^n\left[\cos\dfrac{n(\theta+\phi)}{2} - i \operatorname{sen}\dfrac{n(\theta+\phi)}{2}\right]$.

6. (a) $\dfrac{2^n + 2\cos\dfrac{n\pi}{3}}{3}$; (b) $\dfrac{2^n - 2\cos\dfrac{(n+1)\pi}{3}}{3}$.

(c) $\dfrac{2^n - 2\cos\dfrac{(n-1)\pi}{3}}{3}$.

9. (a) $\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$; $\operatorname{sen} 3\phi = 3\operatorname{sen}\phi - 4\operatorname{sen}^3\phi$;

(b) $\cos 5\phi = 16\cos^5\phi - 20\cos^3\phi + 5\cos\phi$;

$\operatorname{sen} 5\phi = 16\operatorname{sen}^5\phi - 20\operatorname{sen}^3\phi + 5\operatorname{sen}\phi$.

(c) $\cos 4\,\phi = 8\cos^4\phi - 8\cos^2\phi + 1;\ \dfrac{\operatorname{sen} 4\,\phi}{\cos\phi} = 4\operatorname{sen}\phi - 8\operatorname{sen}^3\phi.$

10. (a) $16\operatorname{sen}^5\phi = 10\operatorname{sen}\phi - 5\operatorname{sen} 3\,\phi + \operatorname{sen} 5\,\phi.$

(b) $8\operatorname{sen}^4\phi = 3 - 4\cos 2\,\phi + \cos 4\,\phi.$

§ 15. **1.** $x = 2\,[\cos(67°\,30' + 90°\,k) + i\operatorname{sen}(67°\,30' + 90°\,k)];\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$

2. $x = \sqrt{2}\,[\cos(11°\,15' + 90°\,k) + i\operatorname{sen}(11°\,15' + 90°\,k)];\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$

3. $x = -\sqrt[3]{2}\,[\operatorname{sen}(120°\,k) + i\cos(120°\,k)];\ k = 0;\ \pm 1.$

4. $x = \sqrt[6]{2}\,[\cos(120°\,k - 15°) + i\operatorname{sen}(120°\,k - 15°)];\ k = 0;\ \pm 1.$

5. $x = \cos(30° + 90°\,k) + i\operatorname{sen}(30° + 90°\,k);\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$

6. $x = \cos(40° + 120°\,k) + i\operatorname{sen}(40° + 120°\,k);\ k = 0;\ 1;\ 2.$

7. $x = \sqrt[3]{2}\,[\cos(30° + 60°\,k) + i\operatorname{sen}(30° + 60°\,k)];\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5.$

8. $x = \sqrt[4]{2}\,[\cos(60°\,k - 2°\,30') + i\operatorname{sen}(60°\,k - 2°\,30')];\ k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5.$

9. $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

§ 16. **1.** $(\cos 15° + i\operatorname{sen} 15°)^k = \left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\,\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^k;$

$k = \pm 1;\ \pm 5;\ \pm 7;\ \pm 11.$

Capítulo II

§ 2. **1.** $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1.$ **2.** $2x^7 - 3x^6 - 9\,x^5 - x^4 + 5\,x^3 - 3x^2 - x + 1.$

3. $x^8 - 26\,x^6 + 21\,x^4 + 20\,x^2 + 4.$

4. $3\,x^8 - 2\,x^7 - 19\,x^6 + 11\,x^5 - 7\,x^4 - 3\,x^3 + 8\,x^2 - 2\,x + 1.$

§ 3. **1.** $x^3 + 3\,x^2 + 1.$ **2.** $x^4 - x + 1.$

3. $x^3 - x^2 - 2$, cociente; $8\,x + 1$, resto.

4. $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$ **5.** $7\,x^2 + 7\,x.$

§ 5. **1.** $q = 2\,x^3 - 10\,x^2 + 27\,x - 59;\ r = 119.$

2. $q = -x^3 + 4\,x^2 + 8\,x + 24;\ r = 72.$

3. $q = 6\,x^2 - 2{,}8\,x + 1{,}64;\ r = 4{,}968.$

4. $q = 5\,x^2 + 6{,}5\,x + 11{,}25;\ r = 32{,}75.$

5. $q = 1/3\,x^3 + 1/9\,x^2 - 11/27\,x + 22/81;\ r = 37/81.$

6. $q = 5\,x^5 - 5\,x^4 - x^3 + x^2 - x + 1;\ r = 0.$

7. $q = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + \ldots + (n-1)\,x^{n-2};\ r = 0.$

8. 2,359375. **9.** 1,7318.

§ 6. **1.** $5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5$.

2. $5-15(x+1)+9(x+1)^2+4(x+1)^3-5(x+1)^4+(x+1)^5$.

3. $-317+927(x+2)-1120(x+2)^2+720(x+2)^3-260(x+2)^4+$
$+50(x+2)^5-4(x+2)^6$.

4. $3(x-0{,}3)^4+9{,}6(x-0{,}3)^3+8{,}02(x-0{,}3)^2+2{,}544(x-0{,}3)-0{,}7237$.

§ 7. **1.** 5; 15; 24; 12; — 24. **2.** — 13; 11; —18; 78; — 240; 240.

3. — 67; 81; — 62; 24. **4.** 247/192; — 1; 31/12; — 6; 6.

§ 8. **1.** $x+1$. **2.** $(x+1)^2$. **3.** $2x^2-2x+1$.

4. x^2+1. **5.** x^2-x-1.

Capítulo III

§ 1. **1.** $x^3-3x^2+2x=0$. **2.** $x^3-3x^2+4x-2=0$.

3. $x^4-2x^3+3x^2-2x+2=0$.

4. Raíces: $\frac{1}{2}$; $\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$. **5.** Raíces: $a+1$; $\frac{a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

6. Raíces: 3/2; -3; $1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$. **7.** $\frac{x^3-x}{6}$.

8. $-\frac{2x^4-5x^3-2x^2+15x}{10}$. **9.** Raíces: -1; 2; $1+2i$.

10. Raíces: i; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $1+i$.

§ 3. **1.** $-1/108\,(x^2-1)(x-2)^2(x+3)^3$. **2.** $-1/108\,x^2(x-1)^2(x+1)^3$.

3. $(x-1)\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. $(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$.

5. Factores: $x+1$; $x-1$; $x+\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Factores: $\left(x\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(x\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$.

7. $(x+i)\left(x+\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$.

8. $\left(x+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\right.$
$\left.-i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$.

9. $\left(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. $\left(x+\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right).$

11. Ocho factores:

$$x+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\quad x+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$x-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\quad x-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

12. $2\left(x+\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)\left(x-\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)\left(x+\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)\left(x-\sqrt{3-\sqrt{8}}\right).$

13. $(x-1))\,(x+1)^2\,(x+2).$ **14.** $2\,(x-1)^3\,(x+1)\,(x+1/2).$

15. $7\,x\,(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(x+\dfrac{1}{2}-i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$

20.
$$\frac{(1+xi)^{2m}+(1-xi)^{2m}}{2}=\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4\,m}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\dfrac{3\,\pi}{4\,m}}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\dfrac{(2\,m-1)\,\pi}{4\,m}}\right);$$

$$\frac{(1+xi)^{m+1}+(1-xi)^{2m+1}}{2}=\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4\,m+2}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\dfrac{3\,\pi}{4\,m+2}}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\dfrac{(2\,m-1)\,\pi}{4\,m+2}}\right);$$

§ **4.** **1.** $(x^2+2\,x+2)\,(x^2-2\,x+2).$ **2.** $(x^2+x+1)\,(x^2-x+1).$

3. $(x^2+x\sqrt{3}+1)\,(x^2-x\sqrt{3}+1).$

4. $(x-1)\,(x+1)\,(x^2+x+1)\,(x^2-x+1).$

5. $(x^2+1)\,(x^2+x\sqrt{3}+1)\,(x^2-x\sqrt{3}+1).$

6. $\left(x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,x+1\right)\left(x^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,x+1\right).$

7. Raíces: $-1;\ -1;\ 2+3\,i;\ 2-3\,i.$

8. $-1;\ 1+i;\ 1+i;\ 1-i;\ 1-i.$

9. Raíces; $1;\ 2;\ i;\ i;\ -i;\ -i.$

10. $1;\ i;\ i;\ -i;\ -i;\ -\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{1}{2}-i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

11. Raíces: -2; 3; $\sqrt{2}+i$; $\sqrt{2}-i$; $-\sqrt{2}+i$; $-\sqrt{2}-i$.

12. Raíces: -2; $\dfrac{1 \pm i\sqrt{35}}{3}$.

14. Raíces: $\pm\sqrt{2}$; $\dfrac{1 \pm i\sqrt{31}}{4}$.

15. Raíces: $\dfrac{1 \pm i\sqrt{8}}{3}$; $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

§ 5. **1.** -1; $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. **2.** -3; 3; $1/2$. **3.** -3; -2; $1/3$.

4. 2; $-1/2$; -1. **5.** 9; 4; -6. **6.** 2; -4; -7.

7. $2/3$; $4/3$; 2. **8.** $2/3$; 2; 6. **9.** 2; $\dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$; $k = 2$.

10. $-23/3$; $2/3$; 9; $k = -613/9$. **11.** $q^3 = rp^3$.

12. $4p^3 + 27q^2 = 0$. **14.** $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

15. 1; $1/2$; $\pm\sqrt{5}$. **16.** 3; 2; $1 \pm i$.

17. $-1 \pm \sqrt{2}$; $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **18.** -3; -3; $\dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

19. $1/3$; $2/3$; $-1 \pm i$. **20.** -2; $-1/2$; 1; $5/2$.

21. $1/2$; 1; 2; 4; $k = 35$. **22.** (*a*) 4; (*b*) 2.

23. (*a*) 7; 39; (*b*) 1; 5.

§ 6. **1.** $X_1 = x - 3$; $X_2 = x - 2$. **2.** $X_1 = x + 3$; $X_2 = x - 3$.

3. $X_1 = x + 3$; $X_2 = x - 2$. **4.** $X_1 = x + 3$; $X_2 = x - 4$.

5. $X_1 = x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $X_2 = x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **6.** $X_1 = 4x^2 + 4x + 3$; $X_2 = 2x - 1$.

7. $X_1 = (x-2)(x+4)$; $X_2 = x - 1$.

8. $X_1 = x^2 - 2x + 3$; $X_2 = x - 2$.

9. $X_1 = x^2 + 2x - 3$; $X_2 = x - 3$. **10.** $X_1 = 2x^2 + 1$; $X_2 = x - 3$.

11. $X_1 = 1$; $X_2 = x + 1$; $X_3 = x - 1$.

12. $X_1 = x^2 - 5x + 6$; $X_2 = 1$; $X_3 = x + 1$.

13. $X_1 = x - 2$; $X_2 = x + 1$; $X_3 = x - 1$.

14. $X_1 = 1$; $X_2 = x - 2$; $X_3 = x + 2$.

15. $X_1 = 1$; $X_2 = 3x - 2$; $X_3 = x + 4$.

16. $X_1 = 1$; $X_2 = x^2 + 1$; $X_3 = x - 1$.

17. $X_1 = x - 2$; $X_2 = x^2 + 3x + 2$; $X_3 = x - 1$.

Capítulo IV

§ 2.

1. -2; 7. **2.** -2; 8. **3.** -1; 4.

4. -2; 4. **5.** -2; 2. **6.** -10; 3.

7. -2; 7. **8.** -3; 3. **9.** -2; 5.

10. -1: 3.

§ 3.

1. 5. **2.** 3. **3.** 6.

4. 2.

§ 4.

1. 2; 5; -5. **2.** 6. **3.** -6.

4. -4; 4. **5.** -3; 2. **6.** -8.

7. -3; 2; 4. **8.** -2; 3; 5. **9.** 2; 5.

10. 1 (doble); -2 (doble).

§ 5.

1. 2/3. **2.** -5. **3.** 2/3.

4. -3; 1/2; 3/5. **5.** No tiene raíces racionales. **6.** No tiene raíces racionales.

7. $-2/3$; 2. **8.** -2; 1; 1/2 (doble). **9.** 2.

10. 1; 1/2; $-2/3$. **11.** 2/3; $-3/2$. **12.** -2; 1/2.

14. (*a*) 2; 3; -1 (triple). (*b*) 1/3; i y $-i$ (dobles).

Capítulo V

§ 3.

1. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. **2.** $\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$. **3.** $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}$.

4. $\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}$. **5.** $1/2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$.

6. $-\sqrt[3]{\dfrac{5+\sqrt{23}}{4}}-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{23}}{4}}$. **7.** $\dfrac{2+\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{2}}{3}$.

8. $-2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}$. **9.** -2. **10.** -5.

11. $5+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{50}$. **12.** $-1/2+2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$. **13.** $-1{,}769292$.

14. 0,5960716. **15.** $-4{,}3553013$. **16.** 0,0960717.

21. 4,847322 cm. **22.** 7,910170 cm. **23.** 1,2256 cm.

§ 5.

1. $-0{,}53209$.
0,65270.
2,87939.

2. $-2{,}53209$.
0,87939.
$-1{,}34730$.

3. 1,24698.
$-1{,}80194$.
$-0{,}44504$.

4. $-2,60168$. $2,26181$. $0,33988$.

5. -3, $-2,61803$. $-0,38197$.

6. $-2,65109$. $0,27389$. $1,37720$.

7. $-3,33006$. $-0,79836$. $1,12842$.

8. $-3,86080$. $-2,25411$. $0,11491$.

9. La distancia del plano a la base es 0,34730 del radio.

10. Las distancias de los planos a la base son 0,22607 y 0,48170 del radio, respectivamente.

11. 6,5270 cm.

12. $2,87939$; $-1,87939$; $1,53209$; $-0,53209$; $0,65270$; $0,34730$.

13. $1,61803$; $-0,61803$; $1,19718$; $-0,19718$; $0,5 \pm 1,90965\, i$.

§ 6. **1.** -1; 3; $-1 \pm \sqrt{2}$. **2.** -2; 1; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **3.** $-1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

4. -3; -1; $-1/2$; 2. **5.** $-1 \pm \sqrt{2}$; $1 \pm i$. **6.** $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

7. 2; -3; $-1 \pm i$. **8.** 1; -3; $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$. **9.** $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

10. $\frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$; $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. **11.** $-\frac{1}{2}$; 1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

12. $-1 \pm i\sqrt{2}$; $\frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$.

14. $$2\cos\frac{2\pi}{15} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4};\quad 2\cos\frac{4\pi}{15} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4},$$
$$2\cos\frac{8\pi}{15} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4};\quad 2\cos\frac{16\pi}{15} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}}{4}.$$

15. $$-1;\quad \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};\quad \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Capítulo VI

§ 5. **5.** $(-4;\ -3)$.

6. $(3;6)$; $(6;8)$; $(8;10)$; $(-\infty;3)$ si $\lambda > -1$; $(10;+\infty)$ si $\lambda < -1$.

7. $(-\infty;-1/2)$; $(-1/2;1/3)$; $(2/3;3/2)$; $(3/2;+\infty)$.

10. $(-3;-2)$; $(-2;-1)$; $(-1;0)$; $(0;+\infty)$.

§ 7. **1.** $(-2; -1)$; $(-1; 1)$. **2.** $(-2; -1)$; $(-1; 0)$; una raíz doble.

3. $(-2; -1)$; $(1; 2)$. **4.** $(-1; 0)$; $(4; 5)$.

5. $(-1; 0)$. **6.** $(0; 1)$.

7. $(0; 1)$; $(1; 2)$. **8.** $(-4; -3)$; $(0; 1)$; $(2; 3)$.

9. $(0; 1)$; $(5; 6)$. **10.** $(0; 1)$; $(1; 2)$. **11.** $A \geqq 108$. **12.** $A \geqq 27$.

§ 10. **1.** Una raíz positiva, una negativa y cuatro imaginarias.

2. Una raíz positiva, una negativa y dos imaginarias.

3. Una raíz positiva y cuatro imaginarias.

4. Una raíz positiva y cuatro imaginarias.

5. Todas las raíces imaginarias. **6.** Una raíz positiva y cuatro imaginarias.

7. Todas las raíces imaginarias. **8.** Una raíz positiva, las demás imaginarias.

§ 11. **1.** Una raíz en $(0; 1)$; una raíz en $(4; 5)$.

2. Una raíz en $(0; 1)$; una raíz en $(1; 2)$. **3.** Ninguna raíz en $(4; 5)$.

4. Ninguna raíz en $(1; 2)$; ninguna raíz en $(2; 3)$.

5. Una raíz en $(-3; -1)$; una raíz en $(0; 1)$.

6. Una raíz en $(0; 1)$; dos raíces en $(-1; 0)$.

§ 12. Raíces en los intervalos:

1. $(0; 1)$. **2.** $(-1; 0)$. **3.** $(-1; 0)$; $(4; 4\,{}^1/_2)$; $(4\,{}^1/_2; 5)$.

4. $(-18; -17)$; $(16/5; 29/9)$; $(29/9; 13/4)$.

5. $(0; 1)$; $(3; 4)$; dos imaginarias.

6. $(0; 1)$; $(2; 3)$; dos imaginarias. **7.** Cuatro imaginarias.

8. $(-7; -6)$; -1; dos imaginarias.

9. $(-5; -4)$; $(-2; -1)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$.

10. $(-7; -6)$; $(-3; -2)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$.

11. $(-1; 0)$; cuatro imaginarias. **12.** $(1; 2)$; cuatro imaginarias.

13. $(-3; -2)$; cuatro imaginarias.

14. $(-2; -1)$; $(0; 1)$; $(2; 3)$; dos imaginarias.

15. $(-3; -2)$; $(1; 2)$; cuatro imaginarias.

16. $(-2; -1)$; $(1; 2)$; cuatro imaginarias.

17. Seis imaginarias. **18.** Seis imaginarias.

19. $(-1; 0)$; $(0; 1)$; $(1; 2)$; cuatro imaginarias.

20. $(-1; 0)$; $(0; 1/2)$; $(1/2; 1)$; cuatro imaginarias.

21. $(-1; 0)$; $(0; 1)$; seis imaginarias.

22. $(1; 2)$; $(2; 3)$; seis imaginarias.

Capítulo VII

§ 4. **1.** $V = x^3 - 3x + 1$; $V_1 = x^2 - 1$; $V_2 = 2x - 1$; $V_3 = +1$; $(-2; -1)$; $(0; 1)$; $(1:; 2)$.

2. $V = x^3 + 6x^2 + 10x - 1$; $V_1 = 3x^2 + 12x + 10$; $V_2 = 4x + 23$; $V_3 = -1$; $(0; 1)$.

3. $V = x^3 - 4x + 2$; $V_1 = 3x^2 - 4$; $V_2 = 4x - 3$; $V_3 = +1$; $(-3; -2)$; $(0; 1)$; $(1; 2)$.

4. $V = x^3 - 6x^2 + 8x + 40$; $V_1 = 3x^2 - 12x + 8$; $V_2 = x - 17$; $V_3 = -1$; $(-2; -1)$.

5. $V = x^3 + x^2 - 2x - 1$; $V_1 = 3x^2 + 2x - 2$; $V_2 = 2x + 1$; $V_3 = 1$; $(-2; -1)$; $(-1; 0)$; $(1; 2)$.

6. $V = x^3 - 4x^2 - 4x + 20$; $V_1 = 3x^2 - 8x - 4$; $V_2 = 14x - 41$; $V_3 = +1$; $(-3; -2)$; $(2; 3)$; $(3; 4)$.

7. $V = 6x^4 - 24x^3 + 42x^2 - 32x + 11$; $V_1 = 6x^3 - 18x^2 + 21x - 8$; $V_2 = -x^2 + x - 1$. Todas las raíces imaginarias.

8. $V = 16x^4 - 32x^3 + 88x^2 - 8x + 17$; $V_1 = 8x^3 - 12x^2 + 22x - 1$; $V_2 = -2x^2 - x - 1$. Todas las raíces imaginarias.

9. $V = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 8x + 3$; $V_1 = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$; $V_2 = -2x^2 + x - 1$. Todas las raíces imaginarias.

10. $V = x^4 - 4x^3 + 12^2x - 12x + 5$; $V_1 = x^3 - 3x^2 + 6x - 3$; $V_2 = -3x^2 + 3x - 2$. Todas las raíces imaginarias.

11. $V = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$; $V_1 = 2x^3 - 6x^2 + x + 3$; $V_2 = 5x^2 - 10x - 7$; $V_3 = x - 1$; $V_4 = +1$; $(-1; -1/2)$; $(-1/2; 0)$; $(2; 5/2)$; $(5/2; 3)$.

12. $V = x^4 - 4x^3 + x^2 - 1$; $V_1 = 2x^3 - 6x^2 + x$, $V_2 = 5x^2 - x + 2$; $(-1; 0)$; $(3; 4)$.

13. $V = x^4 + x^3 + x - 1$; $V_1 = 4x^3 + 3x^2 + 1$; $V_2 = 3x^2 - 12x + 17$; $(-2; -1)$; $(0; 1)$.

14. $V = x^4 + 2x^2 - 4x + 10$; $V_1 = x^3 + x - 1$; $V_2 = -x^2 + 3x - 10$. Todas las raíces imaginarias.

15. $V = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 5x^2 + 1$; $V_1 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x$; $V_2 = -3x^2 + 2x - 1$; $(-1; 0)$.

16. $V = x^5 + 5x^4 - 20x^2 - 10x + 2$; $V_1 = x^4 + 4x^3 - 8x - 2$;
$V_2 = x^3 + 3x^2 - 1$; $V_3 = 3x^2 + 7x + 1$; $V_4 = 17x + 11$; $V_5 = +1$;
$(-4; -3)$; $(-3; -2)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$; $(1; 2)$.

17. $V = x^5 - 2x^4 + x^3 - 8x + 6$; $V_1 = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8$;
$V_2 = 3x^3 - 3x^2 + 80x - 67$; $V_3 = 16x^2 - 23x + 9$; $(-2; -1)$; $(0; 1)$;
$(2; 3)$.

18. $V = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 24x + 14$;
$V_1 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 10x - 4$; $V_2 = -x^2 + x - 1$.
Todas las raíces imaginarias.

19. $V = x^6 - 6x^5 + 16x^4 - 24x^3 + 22x^2 - 12x + 4$;
$V_1 = 3x^5 - 15x^4 + 32x^3 - 36x^2 + 22x - 6$;
$V_2 = -x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 8x - 6$. Todas las raíces imaginarias.

20. $V = 5x^6 - 30x^5 + 75x^4 - 90x^3 + 60x^2 - 18x - 2$;
$V_1 = 5x^5 - 25x^4 + 50x^3 - 45x^2 + 20x - 3$;
$V_2 = -x^3 + x^2 - x + 1 = -(x-1)(x^2+1)$; $(-1; 0)$ y raíz 1.

22. $V = 1 - 3x^2 + x^3$; $V_1 = -2 + x$; $V_2 = +1$, para $x > 0$.
$V = 1 - 3x^2 + x^3$; $V_1 = 2 - x$, para $x < 0$.

23. $V = -1 + x^2 - 4x^3 + x^4$; $V_1 = 1 - 6x + 2x^2$; $V_2 = 190 - 67x$;
$V_3 = +1$, para $x > 0$.
$V = 1 + x^2 - 4x^3 + x^4$; $V_1 = -1 + 6x - 2x^2$, para $x < 0$.

24. $V = -1 + x^2 + x^3 + x^4$; $V_1 = 1 + 3x^2 + 4x^3$, para $x > 0$.
$V = -1 + x^2 + x^3 + x^4$; $V_1 = 1 + 3x^2 + 4x^3$; $V_2 = -3 - 2x + 3x^2$;
$V_3 = -4 - 3x$; $V_4 = -1$, para $x < 0$.

25. $V = -1 + 2x^3 + x^4 + x^5$; $V = 6 + 4x + 5x^2$, para $x > 0$ y $x < 0$.

26. $4p^3 + 27q^2 < 0$. **27.** $p^5 - q^2 > 0$.

Capítulo VIII

§ 2. **1.** 1,912. **2.** 2,6207. **3.** 1,573. **4.** 2,1147.
5. 2,511. **6.** 4,264. **7.** —1,663. **8.** 1,532; 0,347.
9. 1,493; 0,250 **10.** $x = 1{,}345$; $y = -0{,}809$; $x = -1{,}711$; $y = -1{,}926$.
11. $x = 1$; $y = 2$; $x = -1{,}771$; $y = 1{,}365$.
12. 14,7. **13.** 47,46. **14.** 122,9.
15. 123,4. **16.** 43,98 cm. **17.** 21,47 cm.
18. 73,4 cm. **19.** (*a*) 179 cm; (*b*) 21,5 cm. **20.** 1,347 veces el radio.

§ 3. **1.** 1,442249. **2.** 1,357208. **3.** 1,324717. **4.** —0,644513.
5. —0,37213778. **6.** 1,164247. **7.** 3,4147412.

8. 1,36523001. **9.** —3,04891734. **10.** 0,250992.

11. 1,688697. **12.** 1,90785326. **13.** 2,31725562.

14. —1,117535. **15.** 0,295865; 1,449080.

16. 0,568396; 2,378596. **17.** —1,734691.

18. 0,228467; 3,232396; —0,197445.

§ 4. **1.** 7,062569 +. **2.** 2,57455046 +. **3.** 0,009477370187 +.

4. 57,29577957. **5.** 1,47817455 +. **6.** 58,86620452 +.

7. 0,17728226 +. **8.** 0,64359442 +.

§ 6. **1.** Error negativo y en valor absoluto $< 3 \times 10^{-8}$; $x = 1{,}5320888 +$.

2. Error absoluto $< 8 \times 10^{-8}$; $x = 1{,}35689195$.

3. Error negativo y en valor absoluto $< 10^{-10}$; $x = -0{,}372137785$.

4. Error negativo y en valor absoluto $< 1{,}2 \times 10^{-10}$; $x = 1{,}49335\,9197 +$.

5. Error negativo y en valor absoluto $< 10^{-10}$; $x = 1{,}907853262 +$.

6. Error negativo y en valor absoluto $< 3{,}6 \times 10^{-13}$; $x = 1{,}734691345692 +$.

§ 7. **3.** 1,7693. **4.** 3,3876. **5.** 3,1038. **6.** 4,3311.

7. 4,2644. **8.** 0,16744. **9.** 0,33765. **10.** 0,20097.

11. 0,9216. **12.** 0,099115. **13.** 1,49336. **14.** 4,06443.

15. 4,33106. **16.** 0,055567. **17.** 0,052167. **18.** 0,35173.

19. 0,56714. **20.** —0,86287. **21.** 3,59728. **22.** 0,92042.

23. 0,51097. **24.** 0,73908. **25.** 0,32470. **26.** 4,49341.

27. 0,86033.

§ 8. **1.** 1,53209; 0,34730; —1,87939. **2.** 1,16425; —1,77287; —3,39138. **3.** 1,69202; 1,35690; —3,04892.

4. 0,25099; 1,49336. **5.** 0,309906. **6.** 2,309881.

7. 1,338483. **8.** 0,73908. **9.** 4,55553.

10. 217° 12′ 0,5″. **11.** 108° 36′ 14″. **12.** 149° 16′ 27″.

13. 1,265 del radio. **14.** 0,804744.

Capítulo IX

§ 1. **1.** $x = 25/4$; $y = -55/4$. **2.** $x = 52/47$; $y = 71/47$.

3. $x = -3/5$; $y = -1$. **4.** $x = 5$; $y = -8$.

5. $x = 1/a$; $y = 0$. **6.** $x = (a+b)^2$; $y = (a-b)^2$.

7. $x = 5$; $y = -5$. **8.** $x = 1$; $y = 1/2$.

§ 2. **1.** (*a*) 3; (*b*) 5; (*c*) 5; (*d*) 6. **2.** (*a*) y (*d*) homogéneos.

4. No existe tal polinomio.

§ 5. **11.** (*a*) -3; (*b*) -18. **12.** (*a*) -187; (*b*) 470.

§ 6. **1.** (*a*) 19; (*b*) 16; (*c*) 13. **2.** (*a*) par; (*b*) par; (*c*) impar.

§ 9. **1.** 0. **2.** 0. **3.** 0. **4.** 0. **5.** 0. **6.** 0.

§ 11. **1.** 2. **2.** 1. **3.** 1. **4.** -15.

5. 0. **6.** 160. **7.** 18. **8.** -5.

9. -15. **10.** 0. **11.** $2(a+b+c)(a-b)(b-c)$.

12. $-2abc$. **13.** $4abc$. **14.** $-2(a^3+b^3)$.

15. $(c-a)(c-b)(b-a)$.

16. $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(d-c)$.

17. $(c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c)$.

18. $(c-a)(c-b)(b-a)(ab+ac+bc)$.

19. $(c-a)(c-b)(b-a)(ab+ac+bc)$.

20. $(c-a)(c-b)(b-a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$.

21. $(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

22. $2(c-a)(c-b)(b-a)(z-x)(z-y)(y-x)$.

23. $4(a+c)(a+b)(b+c)$. **24.** $2abc(a+b+c)^3$.

25. $a(b-a)(c-b)(d-c)$.

26. $(a+b+c+d)(a+c-b-d)(a+b-c-d)(a+d-b-c)$.

27. $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$.

28. $(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1)$.

29. bcd. **30.** $abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$.

31. $(x+n-1)(x-1)^{n-1}$. **32.** $\phi(x) - x\,\phi'(x)$;
$\phi(x) = (a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)$.

33. $(c-a)(c-b)(b-a)(d-a)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$.

34. $(c-a)(c-b)(b-a)(d-a)(d-b)(d-c)[a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+$
$+ad+bc+bd+cd]$.

Capítulo X

§ 1. **1.** $x = 1$; $y = 0$; $z = 1$. **2.** $x = a - 1$; $y = 1$; $z = 0$.

3. $x = t = 1$; $y = z = -1$.

4. $x = -1/5$; $y = 2/5$; $z = -24/5$; $t = -3/5$.

5. $x = -2$; $y = -1$; $z = 1$; $t = 2$.

6. $x_1 = \dfrac{a+d}{2}$; $x_2 = \dfrac{c-d}{2}$; $x_3 = \dfrac{b-c}{2}$; $x_4 = \dfrac{a-b}{2}$.

7. $x_1 = x_3 = 3/5$; $x_2 = x_4 = -{}^2/_5$. **8.** $x_1 = 7$; $x_2 = x_3 = x_4 = -1$.

9. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$. **10.** $x_1 = x_2 = x_4 = -1$; $x_3 = 2$; $x_5 = 0$.

§ 4. **1.** $\rho = 2$. **2.** $\rho = 2$. **3.** $\rho = 3$. **4.** $\rho = 2$.

5. $f_3 = 3f_1 - 2f_2$. **6.** $f_3 = -f_1 - f_2$.

7. $f_3 = -3f_1 + 2f_2$; $f_4 = -f_1$. **8.** $f_3 = -2f_1 + f_2$; $f_4 = -3/2 f_1 + 1/2 f_2$.

§ 5. **1.** Incompatible. **2.** $x = -3z - 4$; $y = 2z + 3$.

3. $x = 1$; $z = -1$; $t = -y$.

4. $x = -3/2 + 3z + t$; $y = 1 - 2z$.

5. $x = 2 + t$; $y = -2t$; $z = 1$. **6.** Incompatible.

Capítulo XI

§ 1. **1.** $\Sigma x_1^2 x_2 + 2 \Sigma x_1 x_2 x_3$. **2.** $\Sigma x_1^2 x_2 + 6 \Sigma x_1 x_2 x_3$.

3. $\Sigma x_1^2 x_2 - 6 \Sigma x_1 x_2 x_3$. **4.** $2 \Sigma x_1^2 x_2^2 + 2 \Sigma x_1^2 x_2 x_3$.

5. $\Sigma x_1^4 - 2 \Sigma x_1^3 x_2 + 3 \Sigma x_1^2 x_2^2$.

6. $\Sigma x_1^4 x_2^2 - 2 \Sigma x_1^4 x_2 x_3 + 2 \Sigma x_1^3 x_2^2 x_3 - 6 \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 2 \Sigma x_1^3 x_2^3$.

7. $\Sigma x_1^2 x_2^2 + 6 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4$. **8.** $\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4$.

9. $3 \Sigma x_1^2 - 2 \Sigma x_1 x_2$.

10. $3 \Sigma x_1^4 - 4 \Sigma x_1^3 x_2 + 2 \Sigma x_1^2 x_2^2 + 4 \Sigma x_1^2 x_2 x_3 - 24 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4$.

§ 2. **1.** $s_0 = 3$; $s_1 = 0$; $s_2 = 6$; $s_3 = -3$; $s_4 = 18$; $s_5 = -15$; $s_6 = 57$.

2. $s_0 = 3$; $s_1 = 3$; $s_2 = 5$; $s_3 = 12$; $s_4 = 29$.

3. $s_0 = 4$; $s_1 = 0$; $s_2 = 0$; $s_3 = 12$; $s_4 = 4$.

4. $s_{-2} = 13$; $s_{-3} = -19$. **5.** $s_{-1} = 0$; $s_{-2} = -2$; $s_{-3} = 3$; $s_{-4} = 2$.

6. $s_1 = 0$; $s_2 = -1$; $s_3 = 3/2$. **7.** $2x^3 - 5x - 4 = 0$.

8. $12x^4 - 4x - 3 = 0$. **9.** $x^3 - 18x^2 + 81x - 81 = 0$.

10. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$. **11.** $x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$.

12. $5x^4 + 4x^2 - 8 = 0$. **14.** (a) 1,6170 (1,618034).
(b) 6,372281318 (6,372281323).

15. 0,3247181 (0,3247179). **17.** $y^3 - 3y - 1 = 0$.

19. $y^3 - 18y^2 + 81y - 81 = 0$. **20.** $y^3 - 42y^2 + 441y - 49 = 0$.

21. (a) 1; (b) 1/3.

§ 3. **1.** $f_1 f_2 - 3f_3$. **2.** $f_1^4 - 6f_1^2 f_2 + 9f_2^2$. **3.** $f_1 f_3$. **4.** $f_2^2 - 2f_1 f_3 + 2f_4$.

§ 4. **1.** $3p_3 - p_1 p_2$. **2.** $p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_4$.

3. $p_1^2 p_2 - p_1 p_3 - 2p_2^2 + 4p_4$.

4. $2p_1^2 p_3 - p_1 p_2^2 + p_2 p_3 - 5p_1 p_4 + 5p_5$.

5. $p_1 p_3 - 4p_4$. **6.** $3p_1 p_4 - p_2 p_3 - 5p_5$.

7. $7p_1 p_5 + 4p_2 p_4 - 3p_3^2 - 3p_1^2 p_4 + p_1 p_2 p_3 - 12p_6$.

8. $p_2 p_4 - 4p_1 p_5 + 9p_6$. **9.** $9p_3 - p_1 p_2$.

10. $2p_2^2 - 2p_1 p_3 - 4p_4$. **11.** $4p_6 + p_1 p_5 - 4p_2 p_4 - p_3^2 + p_1^2 p_4$.

12. $y^3 - 3y^2 - 6y + 17 = 0$. **13.** $y^3 - 12y^2 + 45y - 53 = 0$.

14. $y^3 - qy^2 + pry - r^2 = 0$. **15.** $y^3 - 9y^2 + 26y - 23 = 0$.

16. (a) 3,24698; 1,55495; (b) $-3{,}04727 \pm 1{,}13594\,i$.

19. -3. **20.** 3. **21.** 39. **22.** $-219/104$.

23. 9. **24.** 12. **25.** 4. **26.** 0.

Capítulo XII

§ 2. **1.** $x = 1;\ 0;\ 1;\ -1$.
$y = 0;\ 1;\ 1;\ -1$.

2. $3y^4 + 10y^2 - 1 = 0$; $(y + 1)x = y - 1$.

3. $(3y^2 + 4y - 1)(y^2 + 4y - 3) = 0$; $x(1 + y) = 1 - y$.

4. $x = 0;\ -2$;
$y = 0;\ 2$.

5. $(y - 1)(25y^3 - 45y^2 - 171y + 243) = 0$.
$(7y - 9)x = 5y^2 - 7y$.

6. $(y - 1)(y^3 + 13y^2 + 100y - 100) = 0$; $(3y - 10)x + y^2 + 6y = 0$.

7. $x = -1$; $y = -1$.

8. $x = 0;\ 1;\ -1 + \dfrac{i}{\sqrt{2}};\ -1 - \dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

$y = 1;\ 0;\ -1 - \dfrac{i}{\sqrt{2}};\ -1 + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

9. $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$.

10. $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$. **11.** (a) 1; (b) $y^2 - y$.

§ 3. **1.** $x = 0; \ -2.$ $y = 0; \ 1.$ **2.** $x = 0; -4; \ -5.$ $y = 2; \ 2; \ 3.$ **3.** $x = 0; 0; 0; 1; 1; -1; -1; 2; -2.$ $y = 1; \ -1; \ 3; \ 0; \ 2; \ 0; \ 2; \ 1; \ 1.$

4. (*a*) $y = x$; x arbitrario; (*b*) $x = 1; \ 2.$ $y = -2; \ -1.$

5. No tiene solución. **6.** $x = 0; \ 2; \ 1; \ 42/25.$ $y = 0; \ -1; \ 2; \ 63/25.$

7. $x = 1; \ 0; \ \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{4}; \ \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{4}; \ \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{4}; \ \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{4}.$

$y = 0; \ 1; \ \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{4}; \ \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{4}; \ \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{4}; \ \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{4}.$

8. $y^4 + 9\,y^2 + 54 = 0; \ (y^2 + y + 6)\,x + 2\,y + 6 = 0.$

9. $28\,y^3 + 713\,y^2 - 100\,y = 0; \ (119\,y^2 + 55\,y + 5)\,x = 14\,y^2 - 32\,y + 5.$

10. $\lambda = 10; \ \mu = -5.$

§ 6. **1.** $1 \pm 2\,i.$ **2.** $-0{,}884646 \pm 0{,}589743\,i.$

3. $-1{,}047276 \pm 1{,}135940\,i.$ **4.** $1 \pm i; \ -1 \pm i\sqrt{2}.$

5. $\pm i; \ 1 \pm 2\,i.$ **7.** $0{,}72714 \pm 0{,}43001\,i; \ -0{,}72714 \pm 0{,}93409\,i$

8. $0{,}304877 \pm 0{,}754528\,i.$

INDICE ALFABETICO

—000—

Impreso en Impresora 2001, S.A. de C.V. • 016538 500 04 98 632