

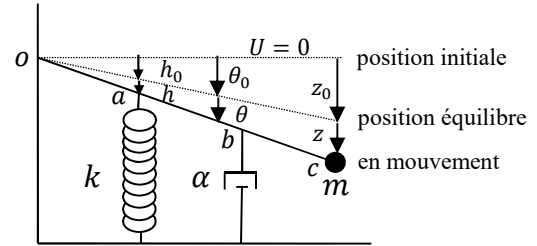
## Examen Remplacement : Ondes & Vibrations

Date de l'examen : Jeudi 17 février 2022 à 12h00

Durée de l'examen : 1 heure et 30 minutes

### EXERCICE 1 (12 pts)

Une tige  $oc$  de longueur  $3l$  et de masse négligeable est articulée au point  $o$  et porte à son extrémité  $c$  une masse  $m$  comme montré sur la figure ci-contre. Un ressort de constante de raideur  $k$  et un amortisseur de coefficient de frottement  $\alpha$  sont liés à la tige aux points  $a$  et  $b$  respectivement ( $N.B.$  :  $oa = ab = bc = l$ ).

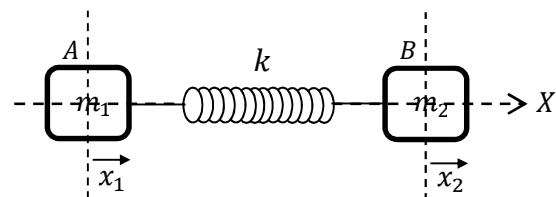


Initialement la tige est horizontale. Lâchée, elle prend une position d'équilibre  $z_0$  (correspondant à un angle  $\theta_0$  et à une déformation du ressort  $h_0$ ). Ensuite, elle est écartée de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta \ll 1$  (correspondant à une position  $z$  et à une déformation du ressort  $h$ ). Le système est à un degré de liberté et  $\theta$  sera la coordonnée généralisée.

1. Montrer que  $z_0 = 3h_0$  et  $z = 3h$ .
2. Déterminer l'énergie cinétique  $T$  du système en fonction de  $\dot{\theta}$ .
3. En utilisant la condition d'équilibre et en éliminant les constantes, montrer que l'énergie potentielle du système est de la forme  $U = \frac{1}{2}(kl^2)\theta^2$  ( $N.B.$  les variations d'énergie potentielle de la tige  $oc$  seront négligées puisque sa masse est négligeable). Considérer l'origine des énergies potentielles,  $U = 0$ , à la position initiale.
4. Écrire la fonction de Lagrange  $L$  du système.
5. Déterminer la fonction de dissipation  $D$  du système en fonction de  $\dot{\theta}$ .
6. Quelle est la nature du système ? Écrire alors son équation différentielle de Lagrange.
7. Dédire son équation différentielle de mouvement ainsi que sa pulsation des oscillations libres  $\omega_0$ . Calculer  $\omega_0$  si  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $k = 9 \text{ N/m}$ .
8. Calculer le facteur d'amortissement  $\lambda$  si  $\alpha = 4.5 \frac{\text{N.s}}{\text{m}}$ .
9. Qu'elle est la nature du mouvement ? Écrire son équation  $\theta(t)$  en notant les constantes d'intégration  $A$  et  $B$ .

### EXERCICE 2 (08 pts)

Soit le montage de la figure ci-contre. Les deux masses vibrent sans frottement sur un support horizontal représenté par l'axe  $X$ . Soit  $x_1$  et  $x_2$  les déplacements des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre respectives  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$ .



1. En considérant  $x_1$  et  $x_2$  comme coordonnées généralisées (le système est à deux degrés de liberté), déterminer l'énergie cinétique  $T$  (en fonction de  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$ ) et potentielle  $U$  (en fonction de  $x_1$  et  $x_2$ ) du système.
2. Dédire alors son lagrangien  $L$ .
3. Identifier la nature du système et écrire ses équations différentielles de Lagrange.
4. Dédire les équations différentielles du mouvement du système.
5. En supposant des solutions de la forme  $\underline{x}_1 = \underline{A}_1 e^{i\omega t}$  et  $\underline{x}_2 = \underline{A}_2 e^{i\omega t}$ , calculer les pulsations libres du système si  $m_1 = m_2 = m = 2 \text{ kg}$  et  $k = 9 \text{ N/m}$ .



Corrigé examen remplacement  
O.V. 2021-2022.

Exercice 1: (12 pts)

1)  $h_0 = 2\theta_0$  et  $z_0 = 3\ell\theta_0 \Rightarrow z_0 = 3h_0$  (0.5)

$h = 2\theta$  et  $z = 3\ell\theta \Rightarrow z = 3h$  (0.5)

2)  $T = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m (3\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} (9m\ell^2) \dot{\theta}^2$  (0.1)

3)  $U = \frac{1}{2} k (h_0 + h)^2 - mg(z_0 + z)$  (0.25)

$U = \frac{1}{2} k \ell^2 \theta^2 + (kh_0 - 3mg)\ell\theta + \frac{1}{2} kh_0 - mgz_0$  (0.25)  
 $\frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0$  (0.25) cte. (0.25)

$\Rightarrow U = \frac{1}{2} (k\ell^2) \theta^2$  (0.5)

4)  $L = T - U$  (0.5)  $= \frac{1}{2} (9m\ell^2) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (k\ell^2) \theta^2$  (0.5)

5)  $D = \frac{1}{2} \alpha v_b^2 = \frac{1}{2} \alpha (2\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} (4\alpha\ell^2) \dot{\theta}^2$  (0.1)

6) Système: libre (0.5) et amorti (0.5)

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$  (0.1)

7)  $\ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{gm} \dot{\theta} + \frac{k}{gm} \theta = 0$  (0.1)

de la forme:  $\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$  (0.5)

$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/gm}$  (0.5)

A.N.  $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$  (0.5)

A.N.  $\lambda = 1 \text{ rad/s}$  (0.5)

8)  $\lambda = (2\alpha)/(gm)$  (0.5)

9)  $\lambda = \omega_0$  (régime critique) (0.5)  $\theta(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t}$  (0.5)

{ 0.1



## Exercice 2: (08 pts)

1)  $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$  (0.1)

$$U = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 - k x_1 x_2 \quad (0.1)$$

2)  $L = T - U$  (0.6)

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 + k x_1 x_2 \quad (0.5)$$

3) système: libre (0.5) et non amorti (0.5)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0 \quad (0.25) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0 \quad (0.25) \end{aligned} \right.$$

4)  $\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 - k x_2 = 0 \quad (0.25) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k x_2 - k x_1 = 0 \quad (0.25) \end{cases}$

5) En injectant  $x_1$  et  $x_2$  dans le système d'équations différentielles de mouvement  $\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k & -k \\ -k & -m_2 \omega^2 + k \end{bmatrix}}_{\Delta(\omega)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (0.5)

Le système possède des solutions si  $\Delta(\omega) = 0$  (0.5)

$$\Rightarrow \omega^2 [m_1 m_2 \omega^2 - (m_1 + m_2) k] = 0 \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \text{ (solution non physique)} \quad (0.25) \\ \omega = \sqrt{(m_1 + m_2) k / (m_1 m_2)} \quad (0.25) \end{cases}$$

$$m_1 = m_2 = m \Rightarrow \omega = \sqrt{2k/m} \quad (0.5)$$

A.N.  $\omega = 3 \text{ rad/s}$  (0.5)