جامعة قاصدي مرباح ورقلة

كلية الرياضيات و علوم المادة

قسم الفيزياء

دروس تحليل: رياضيات 3

Analyse :Math3

موجهة لطلبة LMD المستوى الثانية علوم المادة-SM-

إعداد و تلخيص : د.جمال بشكي

السنة الجامعية (2013-2014)

fb/mehla abderrahmane

1-المتتاليات:

1-1) تعريف المتتالية: المتتالية اللانهائية (أو المتتالية) هي دالة f ، وهي محققة من أجل كل عدد صحيح أكبر أو يساوي m. إذا نضع n العدد الصحيح الأكبر أو يساوي m و $f(n) = a_n$، نستطيع أن نحدد المتتالية بأحد الطرق التالية :

1. $f(m), f(m+1), f(m+2), \dots$
2. $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$
3. $\{f(n): n \geq m\}$
4. $\{f(n)\}_{n=m}^{\infty}$
5. $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$

أمثلة:

العبارات النونية التالية تمثل الحد النوني لمتتاليات :

1. $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3, \dots \Rightarrow f(n) = n + 1$
2. $a_1 = 10\ ,\ a_2 = 5\ , a_3 = \frac{5}{2}\ , \dots \Rightarrow a_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $\{f(n): n \geq 5\}\ ; f(n) = \frac{n}{n+1}$
4. $\{f(n)\}_{n=m}^{\infty}\ ;\ f(n+1) = \left(f(n)\right)^2$
5. $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}\ \ ;\ \ a_n = n!$

1-2)تعريف نهاية المتتالية : لتكن المتتالية $\{u_n\}_{n=m}^{\infty}$ نقول أنها متقاربة للعدد الحقيقي ℓ (أو نقول تنتهي إلى ℓ) إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ ، يوجد العدد الصحيح الموجب p حيث يكون $|u_n - \ell| < \varepsilon$ كلما كان $n \geq p$ ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \text{أو} \quad u_n \to \ell\ ; n \to \infty$$

$$\left\{\lim_{n\to\infty} u_n = \ell\right\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0, \exists p > 0: n \geq p \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\}$$

إذا كانت المتتالية ليست متقاربة للعدد ℓ ، نقول أنها متباعدة .

fb/mehda abderrahmane

1 – 3)نظريات خاصة بالنهايات:

نعتبر c عدد حقيقي ، $\{a_n\}_{n=m}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=m}^{\infty}$ متتاليات لهما نهاية و يكون:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^c = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^c$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

8. $a_n \le b_n \le c_n \ \wedge\ n \ge m$:
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n) = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

2)المتتاليات الرتيبة:

2 – 1) تعريفات: لتكن $\{u_n\}_{n=m}^{\infty}$ متتالية .

إذا نقول عن $\{u_n\}_{n=m}^{\infty}$ أنها:

حالة 1: متزايدة تماما إذا كان: $u_n < u_{n+1}$ من أجل كل $n \ge m$.

حالة 2: متناقصة تماما إذا كان : $u_n > u_{n+1}$ من أجل كل $n \ge m$.

حالة 3: متزايدة إذا كان: $u_n \le u_{n+1}$ من أجل كل $n \ge m$.

حالة 4: متناقصة إذا كان : $u_n \ge u_{n+1}$ من أجل كل $n \ge m$.

حالة 5: محدودة إذا كان: $a \le u_n \le b$ حيث a, b ثوابت حقيقية من أجل كل $n \ge m$.

حالة 6: رتيبة إذا كانت $\{u_n\}_{n=m}^{\infty}$ متزايدة تماما أو متناقصة تماما أو متزايدة أو متناقصة .

كل متتالية رتيبة تكون متقاربة لعدد حقيقي إذا كانت محدودة.

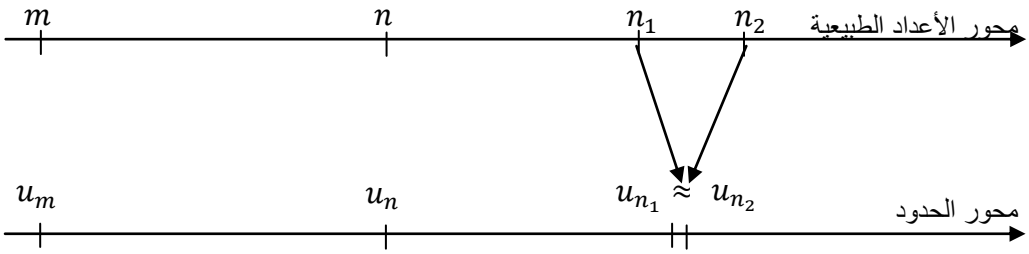
2 – 2)تعريف متتالية كوشي: إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد p حيث يكون $|u_{n1} - u_{n2}| < \varepsilon$ كلما كان $n_1 \ge p$ و $n_2 \ge p$.

$$\left\{u_n \text{ متتالية كوشي}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists p > 0 : n_1 \ge p \wedge n_2 \ge p \Rightarrow \left|u_{n_1} - u_{n_2}\right| < \varepsilon\right\}$$

fb/ mohda abderrahmane

2 – 3)متتالية كوشي و التقارب: كل متتالية متقاربة إذا كانت متتالية كوشي .



2 – 4)نظريات في المتتاليات الرتيبة:

$Augustin - Louis\ Cauchy$

(1789-1857), mathématicien français.

نعتبر $\{(n)\}_{n=m}^{\infty}$ متتالية حيث f دالة قابلة للاشتقاق معرفة من أجل كل عدد حقيقي $x \geq m$. تكون $\{f(n)\}_{n=m}^{\infty}$ متتالية :

(a) متزايدة تماما إذا كان $f'(x) > 0$: من أجل كل $x \geq m$.

(b) متناقصة تماما إذا كان : $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \geq m$.

(c) متزايدة إذا كان : $f'(x) \geq 0$ من أجل كل $x \geq m$.

(d) متناقصة إذا كان : $f'(x) \leq 0$ من أجل كل $x \geq m$.

fb/mehdi abderrahim

3)السلاسل اللانهائية:

3 – 1)تعريف السلسلة المنتهية :

لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية . نستنتج سلسلة الحدود المنتهية العدد :

$s_1 = u_1 ,$

$s_2 = u_1 + u_2 ,$

$s_3 = u_1 + u_2 + u_3 ,$

.

.

.

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

نسمي مجموع n حد من المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ بالسلسلة المنتهيةs_n ، وهذه السلسلة تكون بدلالة n

أمثلة:

1. $u_n = n \;\Rightarrow\; s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $u_n = 2^n \;\Rightarrow\; s_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

3 – 2)تعريف السلسلة اللانهائية :

من أجل كل عدد طبيعيn. نستطيع أن نكتب مجموع مالانهاية من الحدود :

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = S$$

نسمي ∞ السلسلة اللانهائية أو اختصارا السلسلة S_∞ :

ونقول أن S هو مجموع السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$، أو أن السلسلة تتقارب إلى S .

في حالة سلسلة لا تنتهي إلى عدد نقول أنها متباعدة .

fb/mehdi abderrahmane

العبارة النونية u_n تسمى الحد النوني للسلسلة S_∞.

3 – 3) السلسلة الهندسية اللانهائية :

نعتبر a و r أعداد حقيقية و $a \neq 0$. والسلسلة الهندسية التالية:

$$a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

إذا كان $|r| < 1$ فإن السلسلة تتقارب ، و إذا كان $|r| \geq 1$ فإن السلسلة تتباعد .

3 – 4) التقارب المطلق و الشرطي :

$(Convergence\ absolue\ et\ semi-\ convergence)$

إذا كانت $\sum|u_n|$ تتقارب نقول أن السلسلة $\sum u_n$ سلسلة متقاربة مطلقا.

وتسمى $\sum u_n$ سلسلة تقاربية مطلقة.

إذا كانت $\sum|u_n|$ تتباعد لكن السلسلة $\sum u_n$ تتقارب ،نقول $\sum u_n$ سلسلة متقاربة شرطيا وتسمى سلسلة تقاربية شرطية.

3 – 5)التقارب المطلق و تقارب السلسلة:

كل سلسلة متقاربة مطلقا فهي متقاربة.

3 – 6) اختبار التقارب:

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة نستنتج أن $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

و إذا كان $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ نستنتج أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متباعدة .

البرهان:

$$u_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k$$

fb/mehda abderrahmane

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{\infty} u_k = 0$$

أمثلة:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متباعدة

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متباعدة

3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة (لا يمكن أن نستنتج)

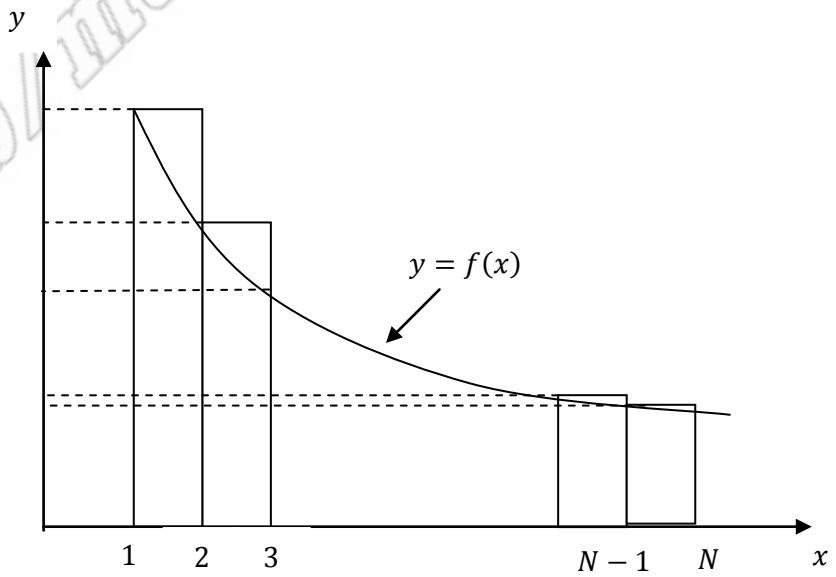
3-7) معيار المقارنة بتكامل:

(Régle de Comparaison avec une intégrale)

لتكن الدالة f المعرفة و المستمرة والمتناقصة على المجال $[1,+\infty[$ حيث

$f(x) > 0$ و $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \geq 1$ ،

تكون العبارتين متقاربان معا و متباعدان معا: $\int_1^{\infty} f(x)dx$ و $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$



fb/mehda abderrahmane

البرهان:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) < \int_{1}^{N} f(x)dx < \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=2}^{N} f(n)\right) < I = \lim_{N\to\infty}\int_{1}^{N} f(x)dx < \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N-1} f(n)\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) < I = \lim_{N\to\infty}\int_{1}^{N} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \approx \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \approx I = \lim_{N\to\infty}\int_{1}^{N} f(x)dx$$

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad f(n) = u_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

$$I = \lim_{N\to\infty}\int_{1}^{N} f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_{1}^{N}\frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty}[\ln x]_{x=1}^{N} = \lim_{N\to\infty}[\ln N - \ln 1] = +\infty$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة .

3 – 8) سلسلة ريمان: (Série de Riemann)

نسمي السلسلة التالية بسلسلة ريمان :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \quad ; p > 0 \quad \begin{cases} p > 1 & \text{تتقارب} \\ 0 < p < 1 & \text{تتباعد} \\ p = 1 & \text{تتباعد} \end{cases}$$

البرهان:

نستعمل معيار المقارنة بتكامل

fb/mehdi abderrahmane

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \Rightarrow f(n) = u_n = \frac{1}{n^p} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}\,; p > 0$$

$$f'(x) = -px^{-p-1} = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

$$I = \lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-p} dx = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^N$$

$$I = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{N^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-p}[N^{1-p} - 1] = \begin{cases} +\infty & p < 1 \quad \text{تتباعد} \\ \dfrac{1}{p-1} & p > 1 \quad \text{تتقارب} \end{cases}$$

من أجل $p = 1$ في الحالة الخاصة للسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تكون متباعدة.

$$I = \lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x} dx = \lim_{N\to\infty} [\ln x]_{x=1}^N = \lim_{N\to\infty} [\ln N - \ln 1] = +\infty$$

Le mathématicien allemand
Bernhard Riemann

(1826-1866)

3 – 9) السلسلة اللانهائية المتناوبة :

نفرض $a_n > 0$ من أجل $n \geq 1$. السلسلة المتناوبة هي سلسلة لها أحد الشكلين:

1. $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$
2. $-a_1 + a_2 - a_3 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

3 – 10) معيار اختبار تقارب السلسلة المتناوبة :

نسميها نظرية ليبنز $(Théorème\ de\ Leibniz)$ **لاختبار السلسلة المتناوبة**

$\sum u_n$ سلسة متناوبة (حدودها لها تناوب في الإشارة)، تتقارب $\sum u_n$ إذا كان:

– **الشرط الأول:** $|u_{n+1}| \leq |\ _n|$ عندما $n \geq 1$.

– **الشرط الثاني:** $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

البرهان : نعتبر السلسلة المتناوبة

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

أي أن القيمة المطلقة للحد النوني:

$$|u_n| = |(-1)^{n+1} a_n| = |(-1)^{n+1}|\,|a_n| = a_n$$

– **الشرط الأول:**

$$|u_{n+1}| \leq |u_n|\ ; n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n \quad \text{أي} \quad a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_\infty$$

– **الشرط الثاني:**

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

بيانيا لدينا السلسلة المنتهية S_n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 - a_2$

$S_3 = a_1 - a_2 + a_3$

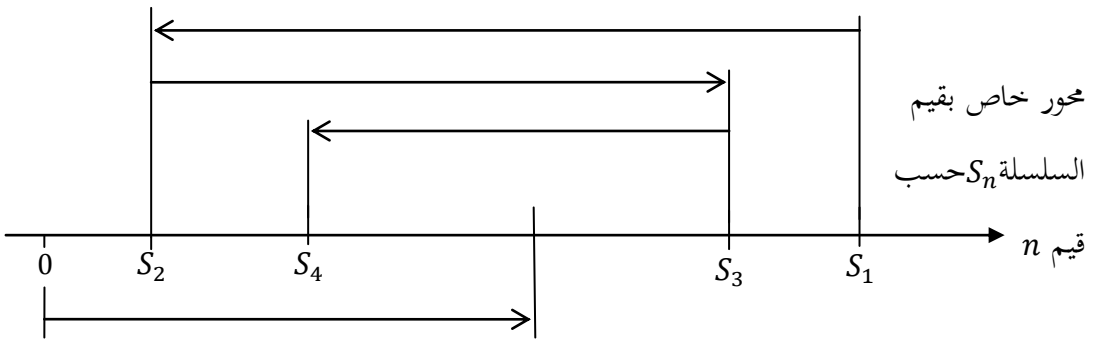
.

.

.

$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n$

fb/mehdi abderrahmane



$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

Le mathématicien Français

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

4) السلاسل اللانهائية ذات الحدود الموجبة :

4-1) الخواص الجبرية:

نعتبر $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ سلاسل متقاربة و $c > 0$ يكون لدينا :

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} c(a_k) = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

4. $\forall m \in \mathbb{N}$; $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ (يتقاربان معا أو يتباعدان معا)

f/mrabda abderrahmane

4 – 2) اختبار المقارنة للسلاسل اللانهائية ذات الحدود الموجبة:

نفرض $0 < a_n < b_n$ من أجل كل الأعداد الطبيعية $n \geq 1$.

حالة 1: يوجد على الأقل $\mathcal{M}$ حيث $\sum_{k=1}^{\infty} {}_k \leq \mathcal{M}$ ، تكون $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متقاربة.

حالة 2: إذا كانت $B = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k$ متقاربة فأن $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متقاربة .

حالة 3: إذا كانت $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ متباعدة فأن $B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ متباعده .

حالة 4: إذا كانت ${}_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .وكان لدينا:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = L \ , \qquad 0 < L < \infty$$

فإن السلسلتين $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ تتقاربان و تتباعدان معا .

$$\sum \boldsymbol{u_n} \Rightarrow \text{متباعدة} \quad \sum w_n \ \text{متباعدة}$$

$$\uparrow$$

$$w_n < \boldsymbol{u_n} < W_n$$

$$\downarrow$$

$$\sum W_n \ \text{متقاربة} \Leftarrow \text{متقاربة} \quad \sum \boldsymbol{u_n} \ \text{متقاربة}$$

تعميم : نعتبر السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ يراد دراسة تقاربها نبحث لحدها النوني u_n عن حصر بين عبارتين w_n و W_n:

4 – 3) معيار النسبة– معيار دالمبير للسلاسل ذات الحدود الموجبة:

$$(Règle\ de\ \ d'Alembert)$$

نفرض ${}_n > 0$ من أجل كل الأعداد الطبيعية $n \geq 1$. نحسب النهاية التالية

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L \qquad \begin{cases} L < 1 & \text{السلسلة تتقارب} \\ L > 1 & \text{السلسلة تتباعد} \\ L = 1 & \text{المعيار يفشل} \end{cases}$$

Le mathématicien Français

$Jean\ Le\ Rond\ d'Alembert$

(1717-1783)

fb/mehla abderrahmane

4-4) معيار الجذر النوني للسلاسل اللانهائية ذات الحدود الموجبة :

و يسمى معيار كوشي $Régle\ de\ Cauchy$

نفرض $u_n > 0$ من أجل كل الأعداد الطبيعية $n \geq 1$. نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L \quad \begin{cases} L < 1 & \text{السلسلة تتقارب} \\ L > 1 & \text{السلسلة تتباعد} \\ L = 1 & \text{المعيار يفشل} \end{cases}$$

ملاحظة: نختار بين معيار النسبة والجذر النوني حسب عبارة الحد النوني.

4-5) معيار راب لاختبار للسلاسل اللانهائية ذات الحدود الموجبة :

نفرض $u_n > 0$ من أجل كل الأعداد الطبيعية $n \geq 1$. نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = r \quad \begin{cases} r > 1 & \text{السلسلة تتقارب} \\ r < 1 & \text{السلسلة تتباعد} \\ r = 1 & \text{المعيار يفشل} \end{cases}$$

ملاحظة:يستعمل هذا الاختبار عندما يفشل اختبار النسبة أو الجذر النوني

4-6) اختبار أو معيار جاوس للسلاسل اللانهائية ذات الحدود الموجبة:

نفرض $u_n > 0$ من أجل كل الأعداد الطبيعية $n \geq 1$. نحسب v_n متتالية يطلب إيجادها

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{r}{n} + \frac{v_n}{n^2}$$

$$\Rightarrow\ v_n = n^2\left(\frac{r}{n} + \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) \wedge \left\{v_n \text{ متتالية محدودة}\right\} \Rightarrow \begin{cases} r > 1 & \text{السلسلة تتقارب} \\ r \leq 1 & \text{السلسلة تتباعد} \end{cases}$$

ملاحظة: يستعمل هذا الاختبار عندما يفشل اختبار راب

fb/mehda abderahmane

برهان دراسة تقارب السلسلة الهندسية اللانهائية :

نعتبر a و r أعداد حقيقية و $a \neq 0$. والسلسلة الهندسية اللانهائية التالية:

$$S_\infty = a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

إذا كان $|r| < 1$ فإن السلسلة تتقارب ، و إذا كان $|r| \geq 1$ فإن السلسلة تتباعد .

البرهان:

أولا: نحسب السلسلة المنتهية

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots ar^n = \sum_{k=0}^{n} ar^k$$

$$\Rightarrow rS_n = ar + ar^2 + \cdots ar^n + ar^{n+1}$$

$$\Rightarrow rS_n - S_n = (ar + ar^2 + \cdots ar^n + ar^{n+1}) - (a + ar + ar^2 + \cdots ar^n)$$

$$\Rightarrow rS_n - S_n = ar^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow S_n(r-1) = a(r^{n+1} - 1)$$

$$\Rightarrow S_n = a\frac{(r^{n+1} - 1)}{(r-1)}$$

ثانيا: نحسب السلسلة اللانهائية

$$\Rightarrow S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[a\frac{(r^{n+1} - 1)}{(r-1)}\right] = \begin{cases} r < 1 & S_\infty = a\dfrac{(0-1)}{(r-1)} = \dfrac{a}{(1-r)} \\ r > 1 & S_\infty = a\dfrac{(+\infty - 1)}{(r-1)} = +\infty \end{cases}$$

$$S_\infty = \begin{cases} r < 1 & S_\infty = \dfrac{a}{(1-r)} & \text{السلسلة الهندسية متقاربة} \\ r > 1 & S_\infty = +\infty & \text{السلسلة الهندسية متباعدة} \\ r = 1 & S_\infty = a + a + \cdots = \pm\infty & \text{السلسلة الهندسية متباعدة} \end{cases}$$

برهان :دراسة تقارب السلسلة اللانهائية ذات الحدود الموجبة بمعيار دالامبير:

$$(Règle\ de\ \ d'Alembert)$$

نفرض $u_n > 0$ من أجل كل الأعداد الطبيعية $n \geq 1$. نحسب النهاية التالية

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = L \quad \begin{cases} L < 1 & \text{السلسلة تتقارب} \\ L > 1 & \text{السلسلة تتباعد} \\ L = 1 & \text{المعيار يفشل} \end{cases}$$

fb/nemla abderrahmane

أولا: نضع نص نظرية النهاية على نهاية النسبة

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L\right\}\Leftrightarrow\left\{\forall\varepsilon>0,\exists p>0\ :\ n\geq p\ \Rightarrow\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-L\right|<\varepsilon\right\}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-L\right|<\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad-\varepsilon<\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-L\right)<+\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\quad L-\varepsilon<\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)<L+\varepsilon$$

ثانيا: نحقق المتراجحة من أجل كل الأعداد الطبيعية $n\geq p$ إلى غاية $n-1$ نحصل على $n-p$ متراجحة

$$n=p\quad:\quad L-\varepsilon<\left(\frac{u_{p+1}}{u_p}\right)<L+\varepsilon$$

$$n=p+1\quad:\quad L-\varepsilon<\left(\frac{u_{p+2}}{u_{p+1}}\right)<L+\varepsilon$$

$$\vdots$$

$$n=n-1\quad:\quad L-\varepsilon<\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)<L+\varepsilon$$

ثالثا: نضرب $n-p$ متراجحة طرف إلى طرف

$$(L-\varepsilon)^{n-p}<\left(\frac{u_{p+1}}{u_p}\right)\left(\frac{u_{p+2}}{u_{p+1}}\right)\dots\left(\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right)\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)<(L+\varepsilon)^{n-p}$$

$$(L-\varepsilon)^{n-p}<\left(\frac{u_n}{u_p}\right)<(L+\varepsilon)^{n-p}$$

$$u_p(L-\varepsilon)^{n-p}<u_n<u_p(L+\varepsilon)^{n-p}$$

$$\frac{u_p}{(L-\varepsilon)^p}(L-\varepsilon)^n<u_n<\frac{u_p}{(L+\varepsilon)^p}(L+\varepsilon)^n$$

رابعا :نحمل قيمة ε أمام قيمة L

$$\frac{u_p}{(L-\varepsilon)^p}(L-\varepsilon)^n<u_n<\frac{u_p}{(L+\varepsilon)^p}(L+\varepsilon)^n$$

خامسا :نحسب السلسلة المنتهية من $n=1$ إلى غاية $n=N$ بجمع أطراف المتراجحة

$$s_N=\frac{u_p}{(L-\varepsilon)^p}\sum_{n=1}^{N}(L-\varepsilon)^n<\sum_{n=1}^{N}u_n<S_N=\frac{u_p}{(L+\varepsilon)^p}\sum_{n=1}^{N}(L+\varepsilon)^n$$

سادسا :نحسب السلسلة الهندسية المنتهية S_N من $n=1$ إلى غاية $n=N$

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}(L+\varepsilon)^n=\frac{((L+\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L+\varepsilon-1)}$$

نحسب السلسلة الهندسية اللانهائية S_∞ من $n=1$ إلى غاية $n=\infty$

fb/ merida abderrahmane

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)^n = \lim_{N\to\infty}\frac{((L+\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L+\varepsilon-1)} = \begin{cases} = \dfrac{1}{1-L} & L<1 \\ = +\infty & L>1 \end{cases}$$

نحسب السلسلة الهندسية المنتهية s_N من $n=1$ إلى غاية $n=N$

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}(L-\varepsilon)^n = \frac{((L-\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L-\varepsilon-1)}$$

نحسب السلسلة الهندسية اللانهائية S_∞ من $n=1$ إلى غاية $n=\infty$

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty}(L-\varepsilon)^n = \lim_{N\to\infty}\frac{((L-\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L-\varepsilon-1)} = \begin{cases} = \dfrac{1}{1-L} & L<1 \\ = +\infty & L>1 \end{cases}$$

سابعا:نحصر السلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ من $n=1$ إلى غاية $n=\infty$

$$\Rightarrow \frac{u_p}{(L+\varepsilon)^p}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{(L^{N+1}-1)}{(L-\varepsilon-1)}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \frac{u_p}{(L+\varepsilon)^p}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{((L+\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L+\varepsilon-1)}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \begin{cases} = \dfrac{u_p}{(L+\varepsilon)^p}\left(\dfrac{1}{1-L}\right) = \text{قيمة عددية} & ; L<1 \quad \text{السلسلة تتقارب} \\ = \dfrac{u_p}{(L+\varepsilon)^p}(+\infty) = +\infty & ; L>1 \quad \text{السلسلة تتباعد} \\ \text{قيمة عددية غير معرفة} & ; L=1 \quad \text{المعيار يفشل} \end{cases}$$

برهان :دراسة تقارب السلسلة اللانهائية ذات الحدود الموجبة بمعيار كوشي :

Régle de Cauchy

نفرض $u_n > 0$ من أجل كل الأعداد الطبيعية $n \geq 1$. نحسب النهاية التالية

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = L \quad \begin{cases} L<1 & \text{السلسلة تتقارب} \\ L>1 & \text{السلسلة تتباعد} \\ L=1 & \text{المعيار يفشل} \end{cases}$$

أولا: نضع نص نظرية النهاية على نهاية الجذر النوني

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = L\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon>0, \exists p>0 \ : \ n\geq p \ \Rightarrow \left|\sqrt[n]{u_n}-L\right| < \varepsilon\right\}$$

$$\left|\sqrt[n]{u_n}-L\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < \left(\sqrt[n]{u_n}-L\right) < +\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad L-\varepsilon < \left(\sqrt[n]{u_n}\right) < L+\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad L-\varepsilon < (u_n)^{1/n} < L+\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad (L-\varepsilon)^n < u_n < (L+\varepsilon)^n$$

ثانيا :نحمل قيمة ε أمام قيمة L

$$\Leftrightarrow \quad (L+\varepsilon)^n < u_n < (L+\varepsilon)^n$$

ثالثا:نحسب السلسلة المنتهية من $n=1$ إلى غاية $n=N$ بجمع أطراف المتراجحة

fb/mehda abderrahmane

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}(L-\varepsilon)^n < \sum_{n=1}^{N} u_n < S_N = \sum_{n=1}^{N}(L+\varepsilon)^n$$

رابعا :نحسب السلسلة المنتهية S_N من $n=1$ إلى غاية $n=N$ بجمع أطراف المتراجحة

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(L+\varepsilon)^n = \frac{((L+\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L+\varepsilon-1)}$$

نحسب السلسلة الهندسية اللانهائية S_∞ من $n=1$ إلى غاية $n=\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)^n = \lim_{N\to\infty}\frac{((L+\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L+\varepsilon-1)} = \begin{cases} = \dfrac{1}{1-L} & L<1 \\ = +\infty & L>1 \end{cases}$$

نحسب السلسلة المنتهية s_N من $n=1$ إلى غاية $n=N$ بجمع أطراف المتراجحة

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}(L-\varepsilon)^n = \frac{((L-\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L-\varepsilon-1)}$$

نحسب السلسلة الهندسية اللانهائية s_∞ من $n=1$ إلى غاية $n=\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(L-\varepsilon)^n = \lim_{N\to\infty}\frac{((L-\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L-\varepsilon-1)} = \begin{cases} = \dfrac{1}{1-L} & L<1 \\ = +\infty & L>1 \end{cases}$$

خامسا:نحصر السلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ من $n=1$ إلى غاية $n=\infty$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\left(\frac{((L-\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L-\varepsilon-1)}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \lim_{N\to\infty}\left(\frac{((L+\varepsilon)^{N+1}-1)}{(L+\varepsilon-1)}\right)$$

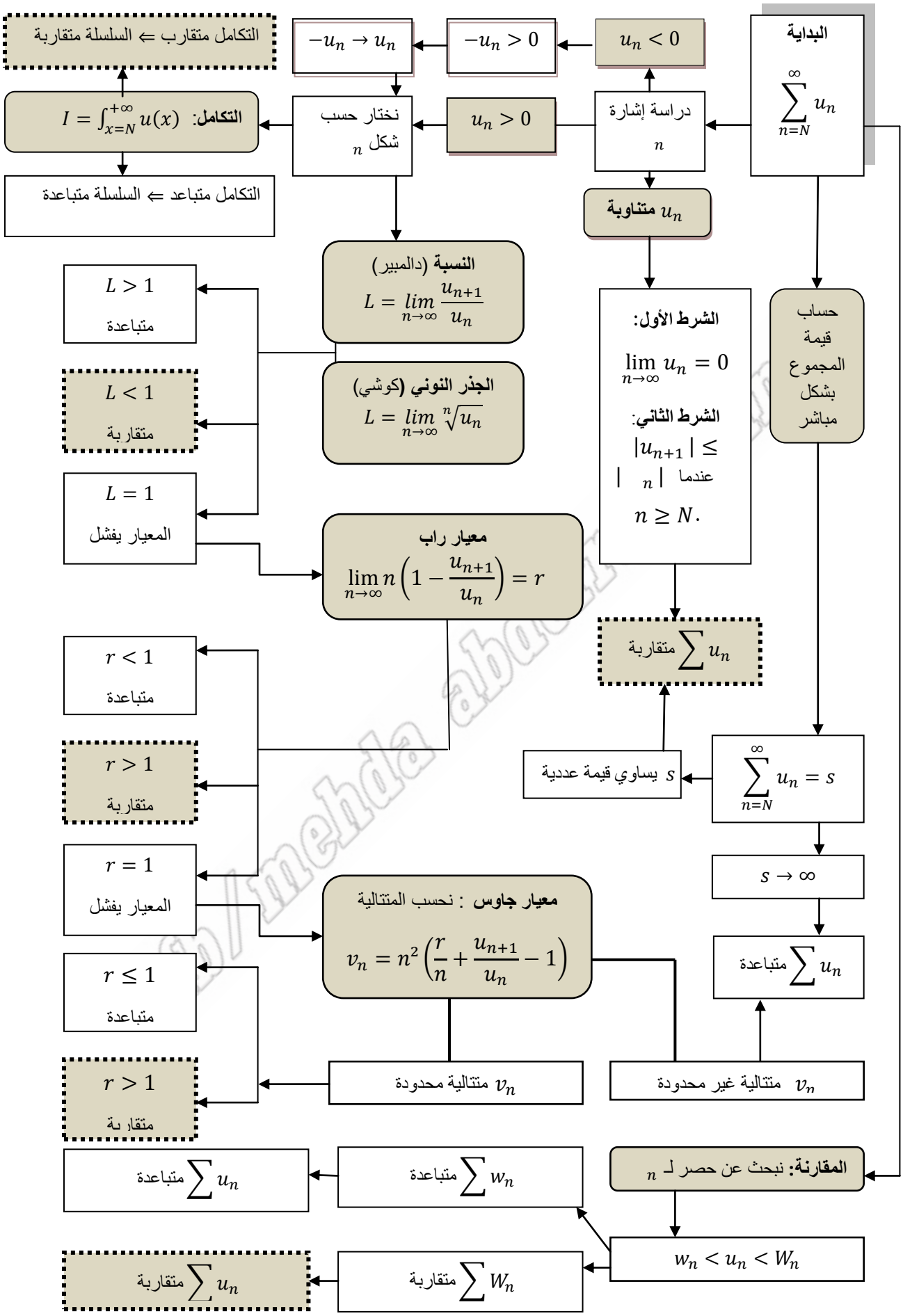
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \begin{cases} = \left(\dfrac{1}{1-L}\right) = \text{قيمة عددية} & ;\ L<1 \quad \text{السلسلة تتقارب} \\ = (+\infty) & ;\ L>1 \quad \text{السلسلة تتباعد} \\ \text{قيمة عددية غير معرفة} & ;\ L=1 \quad \text{المعيار يفشل} \end{cases}$$

ملاحظة :استعمال دالامبير أو كوشي لبرهنة تقارب سلسلة لانهائية يعتمد على ملائمة الحد العام لأحد هذين المعيارين ، أما النتيجة فهي متساوية حسب النظرية التالية :

لإيجاد نهاية العبارة الجذرية $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ \ n}$ يكفي أن نحسب نهاية النسبة : $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$

fb/ menia cheraiahmane

مخطط عام لدراسة تقارب السلاسل اللانهائية



تمارين:

التمرين الأول:

1) احسب نهاية العبارات النونية التالية:

(أ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (ب) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$ (جـ) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{5n^2+1}$ (د) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) إذا كان لدينا $u_n > 0$; $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية ($suite\ numérique$) برهن صحة النظرية:(لإيجاد نهاية العبارة الجذرية $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ يكفي أن نحسب نهاية النسبة: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$) ،ثم استعمل هذه النظرية في حساب النهايات التالية:

(أ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (ب) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$ (جـ) $\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}}$ (د) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{(2n+1)!}\right)^{\frac{1}{n}}$

التمرين الثاني: بمعيار النسبة ($d'Alem$) أو الجذر النوني ($Cauchy$) أدرس تقارب السلاسل ذات الحدود الموجبة:

(أ) $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ (ب) $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (جـ) $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (د) $S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$

التمرين الثالث: اختبر تقارب السلاسل التالية بالاعتماد على معيار النسبة ($Règle\ de\ d'Alembert$):

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1.4}{3.6}\right)^2 + \left(\frac{1.4.7}{3.6.9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1.4.7 \ldots (3n-2)}{3.6.9 \ldots (3n)}\right)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.4.7 \ldots (3n-2)}{3.6.9 \ldots (3n)}\right)^2$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 + \cdots$$

التمرين الرابع: اختبر تقارب السلاسل المتناوبة($les\ séries\ alternées$) باستعمال نظرية ليبنز ($Théorème\ de\ Leibniz$):

(أ) $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (ب) $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)n}$ (جـ) $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}e^{-n}}{n}$

التمرين الخامس: التقارب المطلق والشرطي ($Convergence\ absolue\ et\ semi-\ convergence$)

1) وضح مفهوم التقارب المطلق والشرطي للسلسة ذات الحدود غير موجبة .

2) باستعمال مفهوم التقارب المطلق و الشرطي و باستعمال معيار مناسب اختبر تقارب السلاسل المتناوبة التالية:

(أ) $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (ب) $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n}}{(2n)!}$ (جـ) $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

التمرين السادس: معيار المقارنة بتكامل ($Compara\ avec\ une\ intégrale$)

1) أعط تفسيرا بيانيا لمفهوم معيار التكامل لاختبار السلاسل ذات الحدود الموجبة .

2) نسمي سلسلة ريمان ($Série\ de\ Riemann$) السلسلة المعرفة كما يلي:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \quad ; \quad p \in \mathbb{R} \ , \quad p > 0$$

fb/meldaabdelrahmane

أدرس تقارب السلسلة S باستعمال معيار التكامل .

التمرين السابع:

أولا: لتكن السلسلة الهندسية اللانهائية (أو مجموع مالانهاية من حدود متتالية هندسية)

$$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \ ; \ 1 \le k \le \infty \ ; a > 0$$

المطلوب :دراسة تقارب السلسلة بطريقتين

1- أحسب قيمة السلسلة المنتهية الممثلة (بمجموع n حد من متتالية هندسية)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a^k \ ; \ 1 \le k \le n \ ; \ a > 0$$

2- بالاعتماد على n أدرس تقارب السلسلة الهندسية اللانهائية S_∞ حسب قيم العدد الحقيقي a .

3- باستعمال معيار النسبة و الجذر النوني تحقق من تقارب السلسلة $_\infty$ حسب قيم العدد الحقيقي a .

ثانيا: إذا كان لدينا $S = \sum u_n \ ; u_n > 0$ سلسلة لانهائية ذات حدود موجبة ،وليس لدينا طريقة مباشرة لحساب مجموعها، ونريد دراسة تقاربها لعدد حقيقي (أي أنها تنتهي لعدد حقيقي) بدون معرفة القيمة العددية ، فقط نأخذ فكرة عن تقاربها (متقاربة أو متباعدة) ؛ نستعمل أحد المعيارين حسب شكل الحد النوني u_n :

اختبار التقارب بمعيار النسبة (معيار دالامبير) $(Règle\ de\ d'Alembert)$.

اختبار التقارب بمعيار الجذر النوني (معيار كوشي) $(Règle\ de\ Cauchy)$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \qquad L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$$

$$\begin{cases} 0 < L < 1 & : \text{السلسلة متقاربة} \\ L > 1 & : \text{السلسلة متباعدة} \\ L = 1 & : \text{المعيار يفشل} \end{cases}$$

المطلوب :البرهان على صحة المعيارين .

1- بالاعتماد على نظريات النهايات الذي ينص على ما يلي :

$$\left\{L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists p > 0 : n \ge p \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| < \varepsilon\right\} \quad \text{معيار دالامبير}$$

$$\left\{L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists p > 0 : n \ge p \Rightarrow \left|\sqrt[n]{u_n} - L\right| < \varepsilon\right\} \quad \text{معيار كوشي}$$

و بالاعتماد على مجموع السلسلة الهندسية اللانهائية برهن صحة اختبار التقارب الخاص بالمعيارين .

ملاحظة: p يمثل العدد الطبيعي الذي يبدأ عنده وجود تقارب إلى النهاية L بفارق يتمثل في ε .

ثالثا: استعمل معيار مناسب لدراسة تقارب السلاسل التالية:

fb/mouda abderrahmane

$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ (1) $\qquad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$ (2) $\qquad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ (3)

$S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$ (4) $\qquad S_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$ (5) $\qquad S_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{-n}}$ (6)

التمرين العاشر : استعمال معيار المقارنة لدراسة تقارب سلسلة ذات حدود موجبة

1) لتكن السلسلة $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ برهن باستعمال معيار مناسب أن S_1 متقاربة.

2) أثبت أن $\frac{1}{2n^3-1} < \frac{1}{n^3}$ ،ثم استنتج أن السلسلة S_2 التالية سلسلة متقاربة باستعمال المقارنة بينها و بين S_1 :

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$$

3) لتكن السلسلة $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ برهن باستعمال معيار مناسب أن S_1 متباعدة.

4) أثبت أن $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$ ،أدرس تقارب السلسلة S_4 انطلاقا من معرفة أن S_3 متباعدة :

$$S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} w_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

التمرين الحادي عشر : استعمال معيار مقارنة حاصل قسمة لدراسة تقارب سلسلة ذات حدود موجبة

إذا كانت $u_n > 0$ ، $v_n > 0$ و لدينا نهاية حاصل قسمة $A = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$

نعتبر ان السلسلة $\sum v_n$ معلومة التقارب (متقاربة أو متباعدة) ندرس تقارب السلسلة $\sum u_n$ المجهولة التقارب

1) $A = \infty$: $\sum v_n$ تتباعد $\Leftarrow$ $\sum u_n$ تتباعد .

2) $A = 0$: $\sum v_n$ تتقارب $\Leftarrow$ $\sum u_n$ تتقارب .

3) $A \neq 0$: $\sum v_n$ و $\sum u_n$ يتقاربان معا أو يتباعدان معا .

باستعمال هذا المعيار و سلسلة ريمان $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^p}$ المعلومة التقارب أدرس تقارب السلسلة $\sum u_n$ في كل حالة :

1) $A = \lim_{n\to\infty} n^p u_n = \infty$: $0 < p \leq 1$ $\Leftarrow$ ماذا نقول عن تقارب $\sum u_n$.

2) $A = \lim_{n\to\infty} n^p u_n = 0$: $p > 1$ $\Leftarrow$ ماذا نقول عن تقارب $\sum u_n$.

3) $A = \lim_{n\to\infty} n^p u_n \neq 0$: $0 < p \leq 1$ $\Leftarrow$ ماذا نقول عن تقارب $\sum u_n$.

4) $A = \lim_{n\to\infty} n^p u_n \neq 0$: $p > 1$ $\Leftarrow$ ماذا نقول عن تقارب $\sum u_n$.

التمرين الثاني عشر : استعمال الحساب المباشر لدراسة تقارب سلسلة

لتكن السلسلة المعرفة بحدها العام كما يلي : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1) أحسب السلسلة المنتهية S_n بدلالة n :

fb/mehda sherrahmane

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

2) ماذا نسمي هذا النوع من السلاسل انطلاقا من تداخل الحدود في السلسلة n ؟

3) أحسب نهاية الحد العام عندما $n \to +\infty$. ماذا نقول عن تقارب السلسلة اللانهائية ،ثم استنتج قيمة للسلسلة S .

fb/mehda abderrahmane

5- سلاسل الدوال:

5- 1) تعريف متتالية دوال:

كل متتالية تحوي متغير حقيقي في عبارة الحد العام لها تسمى متتالية دوال .

مثال:

1. $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}}$; $u_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$
2. $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}}$; $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$

يعتبر x وسيط حقيقي و n متغير طبيعي

ملاحظة: و من الممكن استعمال المتغير المركب بدلا من المتغير الحقيقي و تصبح المتتالية متتالية دوال ذات متغير مركب, و خواصها تشابه ذات المتغير الحقيقي مع مراعاة خصائص الأعداد المركبة من حيث التمثيل في مستوي مركب عكس الأعداد الحقيقية التي تمثل في محور فقط.

5- 2) تعريف سلسلة دوال:

كل سلسلة تحوي متغير حقيقي في عبارة الحد العام لها تسمى سلسلة دوال .

مثال:

1. $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots$
2. $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots$

5- 3) مثال توضيحي لحساب قيمة سلسلة دوال :

لتكن لسلسلة دوال التالية حيث $x>0$:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$$

fb/mehda abderahmane

نلاحظ أن السلسلة هي عبارة عن مجموع غير منتهي لحدود متتالية هندسية أساسها x ، وهذه الحدود موجبة ، وحساب هذا المجموع هو:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}$$

و منه حالات التقارب :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0 < x < 1\,; S(x) = \dfrac{1}{1-x} & \text{السلسلة متقاربة} \\ x > 1 \quad ; S(x) \to +\infty & \text{السلسلة متباعدة} \\ x = 1 \quad ; S(x) \to +\infty & \text{السلسلة متباعدة} \end{cases}$$

في حالة $x < 0$: نضع $x = -X = -|\mathcal{X}|$ حيث $X > 0$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-|\mathcal{X}|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |\mathcal{X}|^n$$

$$S(X) = 1 - |\mathcal{X}| + |\mathcal{X}|^2 - |\mathcal{X}|^3 + \cdots$$

أصبحت السلسلة متناوبة . ندرس التقارب للسلسلة :ولدينا $\mathcal{x} = -|\mathcal{x}|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |x|^n$$

هذه السلسلة مجموع حدود متتالية هندسية أساسها

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} -1 < x < 0\,; S(x) = \dfrac{1}{1-x} & \text{السلسلة متقاربة} \\ x < -1 \quad ; S(x) \to +\infty & \text{السلسلة متباعدة} \\ x = -1 \quad ; S(x) \to +\infty & \text{السلسلة متباعدة} \end{cases}$$

و منه نستنتج التعميم من أجل كل عدد حقيقي التقارب المطلق للسلسلة:

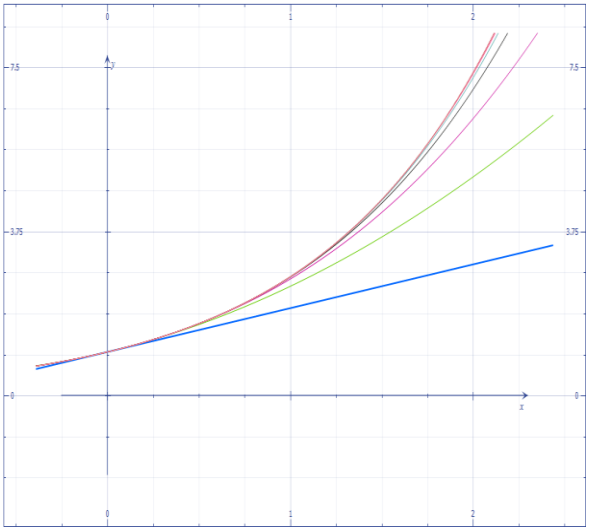
$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u_n(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{-1} < x < 1 \quad ; \boldsymbol{S(x) = \dfrac{1}{1-x}} & \text{السلسلة متقاربة} \\ \boldsymbol{x} < -1 \ \vee x > 1 \ ; \boldsymbol{S(x)} \to +\infty & \text{السلسلة متباعدة} \\ \boldsymbol{x = -1 \vee x = 1} \ ; \boldsymbol{S(x)} \to +\infty & \text{السلسلة متباعدة} \end{cases}$$

السلسلة متقاربة مهما اخترنا قيمة للعدد الحقيقي $-1 < x < 1$ ، نسمي هذه العشوائية في الاختيار بالانتظام في التقارب ، ونقول أن السلسلة متقاربة بانتظام على المجال $]-1,+1[$.وتم اكتشاف مجال التقارب بالحساب المباشر .

fb/mehda abderrahmane

5 – 3) مثال توضيحي لحساب قيمة ورسم سلسلة دوال :

$$\sum_{n=0}^{20} \frac{x^n}{n!}$$



$x+1$

$\frac{x^2}{2}+x+1$

$\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$

$\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$

$\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$

نلاحظ أن السلسلة كلما زدنا حدا تصل إلى تطابق مع دالة حتى الوصول إلى الدالة التي تتقارب لها السلسلة . وتم اكتشاف مجال التقارب برسم السلاسل المنتهية .

6 –التقارب المنتظم:

6 – 1) التقارب المنتظم لمتتالية دوال :

نلخصه في القضية التالية : لدينا متتالية دوال $u_n(x)$ معرفة على المجال $[a,b]$ ، يقال أن المتتالية تقترب من المقدار $u(x)$ ، أو لها النهاية للمقدار $u(x)$ حيث $x \in [a,b]$: في هذه الحالة نكتب

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p > 0, \forall x \in [a,b] : \quad n \geq p \quad \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$$

حالة خاصة: إذا اعتمدت قيمة العدد الطبيعي p على اختيار ε فقط (وليس على x) نقول أن متتالية الدوال متقاربة بانتظام على المجال $[,b]$.

fb/mehla abderrahmane

6 – 2) التقارب المنتظم لسلاسل دوال : نلخصه في القضية التالية

لدينا سلسلة دوال $\sum u_n(x)$ معرفة على المجال $[a,b]$ ، يقال أن السلسلة تقترب من المقدار $S(x)$ ، أو لها النهاية للمقدار $S(x)$ حيث $x \in [a,b]$: في هذه الحالة نكتب

$$\sum u_n(x) = S(x)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p > 0, \forall x \in [a,b] : n \geq p \Rightarrow \left|\sum u_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon$$

حالة خاصة: إذا اعتمدت قيمة العدد الطبيعي p على اختيار ε فقط (وليس على x) نقول أن سلسلة الدوال متقاربة بانتظام على المجال $[,b]$.

6 – 3) معايير التقارب المنتظم لسلاسل دوال :

أولا: معيار ويراستراس $(règle\ de\ Weierstrass)$

و يسمى أحيانا اختبار M ويراستراس ، و تكون السلسلة $\sum u_n(x)$ متقاربة بانتظام على مجال إذا وجدت متتالية عددية M_n ذات الحدود الموجبة تحقق :

الشرط الأول : $|u_n(x)| \leq M_n$. حيث $\forall n \in \mathbb{N}$; $_n > 0$

الشرط الثاني : $\sum M_n$ سلسلة ثوابت متقاربة .

ملاحظة : نسمي السلسلة $\sum M_n$ سلسلة مسيطرة على السلسلة $\sum u_n(x)$

أو نقول أن السلسلة $\sum u_n(x)$ لها سلسلة مسيطرة $(la\ série\ majorant)$.

WEIERSTRASS Karl

Wilhelm Theodor

***allemand*, 1815 – 1897**

th/mehda abderahmane

البرهان: على معيار وايرستراس للتقارب المنتظم لسلسلة الدوال :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

نعتبر السلسلة المنتهية ذات n حد:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \cdots$$

و نعتبر الباقي من السلسلة بعد n من الحدود هو :

$$R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \cdots$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + u_{n+3}(x) + \cdots| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + |u_{n+3}(x)| + \cdots$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq M_{n+1} + M_{n+2} + M_{n+3} + \cdots$$

و إذا كان لدينا السلسلة $\sum M_n$ تتقارب يعني أن المجموع :

$$M_{n+1} + M_{n+2} + M_{n+3} + \cdots < \varepsilon \ \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon$$

نلاحظ أنه مهما يكن x فإنه لا يؤثر في اختيار ε يعني انه تقارب منتظم في مجال يخص التقارب مطلق. و عموما مجال التقارب المطلق يمثل مجال تقارب منتظم .

مثال1: لتكن سلسلة الدوال التالية: متقاربة بانتظام على المجال $[0,2\pi]$

$$\sum u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

$$\forall x \in [0,2\pi] \ : \ |\cos nx| \leq 1 \ \Rightarrow \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

يكفي أن نضع $M_n = \frac{1}{2}$ متتالية عددية ذات حدود موجبة تحقق الشرط الأول و الثاني حيث أن السلسلة متقاربة :

$$\sum M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

fb/mehda ahlerrahmane

و هذا الشرط كاف وليس ضروري للتقارب المنتظم، حيث من الممكن أن تكون السلسلة متقاربة بانتظام في حين أن الاختبار لا يتحقق.

مثال2: لتكن سلسلة الدوال التالية: متقاربة بانتظام على المجال $[-1,+1]$

$$\sum u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$\forall x \in [-1,+1] \ : \ |x^n| \leq 1 \ \Rightarrow \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

يكفي أن نضع $M_n = \frac{1}{2}$ متتالية عددية ذات حدود موجبة تحقق الشرط الأول و الثاني حيث أن السلسلة متقاربة:

$$\sum M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

مثال3: لتكن سلسلة الدوال التالية: أدرس التقارب المنتظم

$$\sum u_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{(1+x^2)} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \cdots$$

السلسلة هي عبارة عن سلسلة هندسية الأساس $r = \frac{1}{1+x^2}$ و بفرض أن $x \neq 0$ مجموعها حسب ما سبق :

$$\sum u_n(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$$

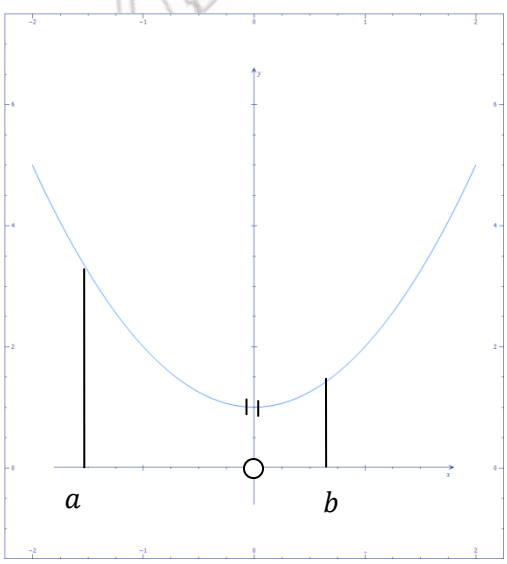
نلاحظ أن قيمة x عند الصفر تسبب عدم استمرار حسب الشكل التالي:

$$\sum u_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

مهما كان المجال $[,b]$ الذي يحوي $x = 0$ تكون السلسلة غير مستمرة .

و مهما اخترنا x ينتمي للمجال $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ تصبح قيمة السلسلة متعلقة بقيمة x أي أن سلسلة الدوال غير متقاربة بانتظام على هذا المجال.

لكنها تتقارب بانتظام على المجالات التي لا تحوي الصفر



mehda abderrahmane

ثانيا: معيار دريكلي $(règle\ de\ Dirichlet)$

و تكون السلسلة $\sum U_n(x) = \sum a_n u_n(x)$ متقاربة بانتظام على مجال$[a,b]$ إذا وجدت متتالية عددية a_n ذات الحدود الموجبة تحقق :

الشرط الأول : $\{a_n\}$ متتالية متناقصة .

الشرط الثاني : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

الشرط الثالث : يوجد مقدار ثابت و ليكن Q حيث:

$$\forall x \in [a,b] \ : \ |u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots| < Q$$

$$|u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots| < |u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_n(x)| + \cdots$$

$$|u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots| < \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = Q$$

ومنه نبرهن أن $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ سلسلة متقاربة أي أن السلسلة$\sum u_n(x)$ متقاربة مطلقا و هذا يؤدي إلى تقارب $\sum a_n u_n(x)$ بانتظام على مجال$[a,b]$ المجال $[a,b]$ مجال التقارب بانتظام يطلب إيجاده :

DIRICHLET (LEJEUNE)

Peter Gustav,

***allemand*, 1805 – 1859**

دراسة التقارب المنتظم لسلاسل دوال بمعيار دريكلي:

مثال1: لتكن سلسلة الدوال التالية:

$$\sum U_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \ldots + \frac{x^n}{n+1} + \cdots$$

$$\sum U_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n+1} \quad ; \quad u_n(x) = x^n$$

الشرط الأول : $a_n = \frac{1}{n+1}$; $\{a_n\}_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة . شرط محقق

الشرط الثاني : $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. شرط محقق

الشرط الثالث : يوجد مقدار ثابت و ليكن Q حيث:

$$\forall x \in [a,b] \ : \ |u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots| < Q$$

$$\forall x \in [a,b] \ : \ |1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots| < Q$$

$$\forall x \in]-1,+1[: |1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots| < \sum_{n=0}^{\infty} |x^n| = Q$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x^n| = \frac{1}{1-x} \quad ; \forall x \in]-1,+1[$$

المجال $]-1,+1[$ يعتبر مجال التقارب بانتظام .

مثال 2: لتكن سلسلة الدوال التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.3^n}$$

لتسهيل العملية نستعمل الجدول التالي:

الاختيار	a_n	$u_n(x)$	الشرط الأول: تناقص المتتالية	الشرط الثاني: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	الحالة	مجال التقارب المنتظم
1	$\frac{1}{n}$	$\frac{x^n}{3^n}$	متناقصة	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	مقبولة	$-3 < x < 3$
2	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{x^n}{n}$	متناقصة	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	مقبولة	$-1 < x < 1$
3	$\frac{1}{n.3^n}$	x^n	متناقصة	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	مقبولة	$-1 < x < 1$
الاختيار 1 هو أحسن اختيار لأنه أعطى أوسع مجال . ومجال التقارب المنتظم هو $-3 < x < 3$.						

حيث أن الجدول الثاني يلخص التقارب المطلق لـ $\sum \boldsymbol{u_n(x)}$ حسب الاختيار:

fb/mehdi abderahmane

الاختيار	$u_n(x)$	$u_{n+1}(x)$	$\lvert u_{n+1}(x)/u_n(x)\rvert$	مجال التقارب المطلق
1	$\frac{x^n}{3^n}$	$\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}}$	$\frac{\lvert x\rvert}{3} < 1$	$-3 < x < 3$
2	$\frac{x^n}{n}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\lvert x\rvert < 1$	$-1 < x < 1$
3	x^n	x^{n+1}	$\lvert x\rvert < 1$	$-1 < x < 1$

مثال 3: لتكن سلسلة الدوال التالية : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,.x^n}{2^n(3n-1)}$

الاختيار	a_n	$u_n(x)$	الشرط الأول: تناقص المتتالية	الشرط الثاني: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	الحالة	مجال التقارب المنتظم
1	n	$\frac{x^n}{2^n(3n-1)}$	متناقصة	$+\infty$	مرفوضة	$-2 < x < 2$
2	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{n\,.x^n}{(3n-1)}$	متناقصة	0	مقبولة	$-1 < x < 1$
3	$\frac{1}{3n-1}$	$\frac{n\,.x^n}{2^n}$	متناقصة	0	مقبولة	$-2 < x < 2$
4	$\frac{n}{2^n}$	$\frac{x^n}{(3n-1)}$	متناقصة	0	مقبولة	$-1 < x < 1$
5	$\frac{n}{3n-1}$	$\frac{x^n}{2^n}$	متناقصة	$\frac{1}{3}$	مرفوضة	$-2 < x < 2$
6	$\frac{1}{2^n(3n-1)}$	$n\,.x^n$	متناقصة	0	مقبولة	$-1 < x < 1$
7	$\frac{n}{2^n(3n-1)}$	x^n	متناقصة	0	مقبولة	$-1 < x < 1$

الاختيار 1 و 5 اختياران مرفوضان لأنهما لم يحققا الشرط الثاني .

الاختيار 3 هو أحسن اختيار لأنه أعطى أوسع مجال .

ومجال التقارب المنتظم هو $-2 < x < 2$.

fb/mehdi abderrahmane

6 – 4) استمرار سلاسل دوال :

نعتبر سلسلة الدالة المستمرة والمتقاربة على المجال $[a,b]$:

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

يجب أن تكون كل الحدود مستمرة.

مثال1: لتكن سلسلة الدوال التالية: ندرس التقارب المنتظم و الاستمرار

$$S(x) = \sum u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

$$S(x) = \sum u_n(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) \ldots$$

لحساب السلسلة نستعمل السلسلة المنتهية:

$$S_n(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

$$S_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$$

هذا النوع من السلاسل يسمى السلاسل المتداخلة.

$$x > 0 \;\; ; \;\; S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = 1 - x$$

$$x < 0 \;\; ; \;\; S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = -1 - x$$

طريقة رسم الدوال:

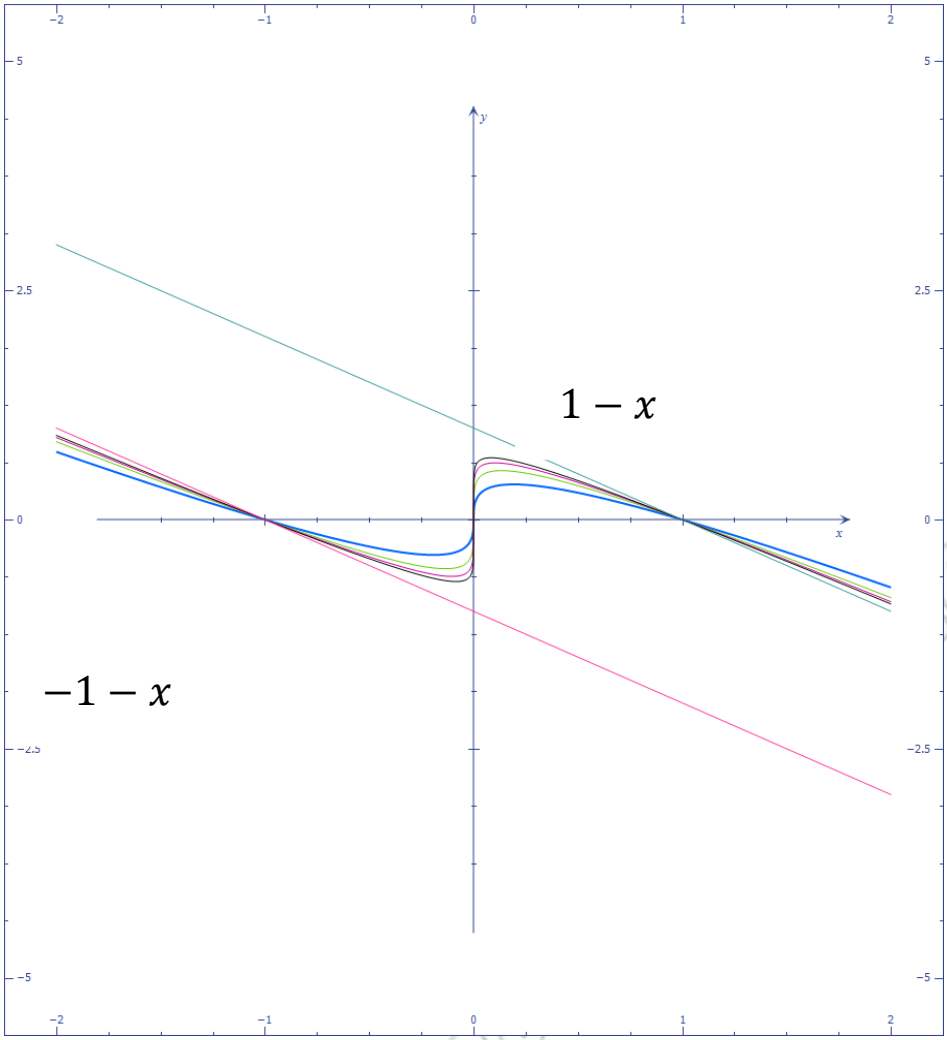
$$S_1(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) = x^{\frac{1}{3}} - x$$

$$S_2(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) = x^{\frac{1}{5}} - x$$

$$S_3(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) = x^{\frac{1}{7}} - x$$

كلما زادت قيمة n بجوار المالانهاية يقترب منحني السلسلة إلى المستقيمين $y = 1 - x$ و $y = -1 - x$ لكن ينقطع و تصبح السلسلة اللامنتهية غير مستمرة على المجال $]-\infty, +\infty[$.

fb/mehdi abderrahmane



6 – 5) اشتقاق و تكامل سلاسل دوال :

نعتبر سلسلة الدالة المستمرة والمتقاربة على المجال $[a,b]$:

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

نستنتج أن كل من السلسلتين $F(x)$ و $f(x)$ متقاربتين:

$$F(x) = \int_{x=\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int_{x=\alpha}^{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x=\alpha}^{\beta} u_n(x)dx$$

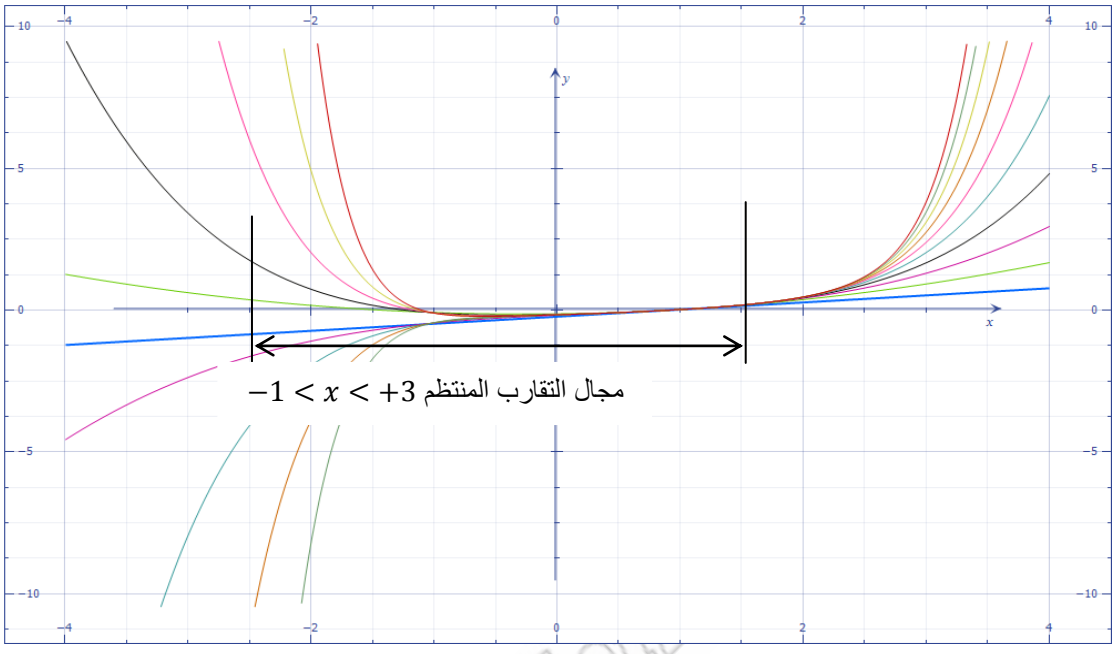
$$F(x) = \int_{x=\alpha}^{\beta} u_0(x)dx + \int_{x=\alpha}^{\beta} u_1(x)dx + \cdots + \int_{x=\alpha}^{\beta} u_n(x)dx + \cdots$$

$$f(x) = S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n{}'(x)$$

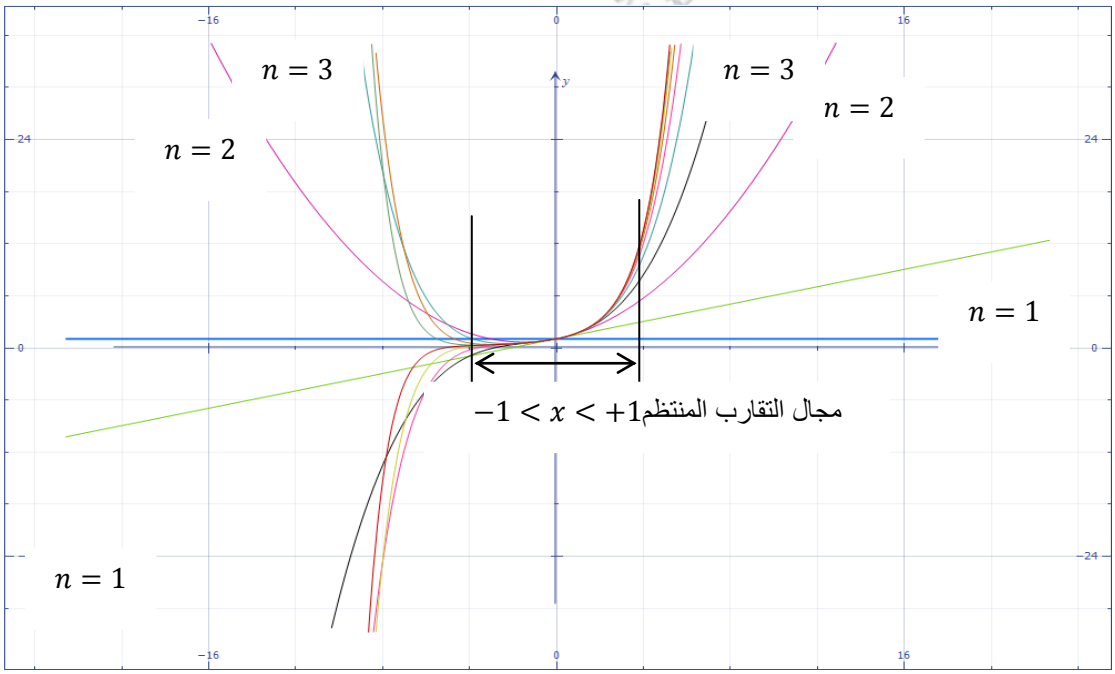
$$f(x) = u_0{}'(x) + u_1{}'(x) + \cdots + u_n{}'(x) + \cdots$$

6-6) أمثلة على التقارب المنتظم لدوال سلاسل :

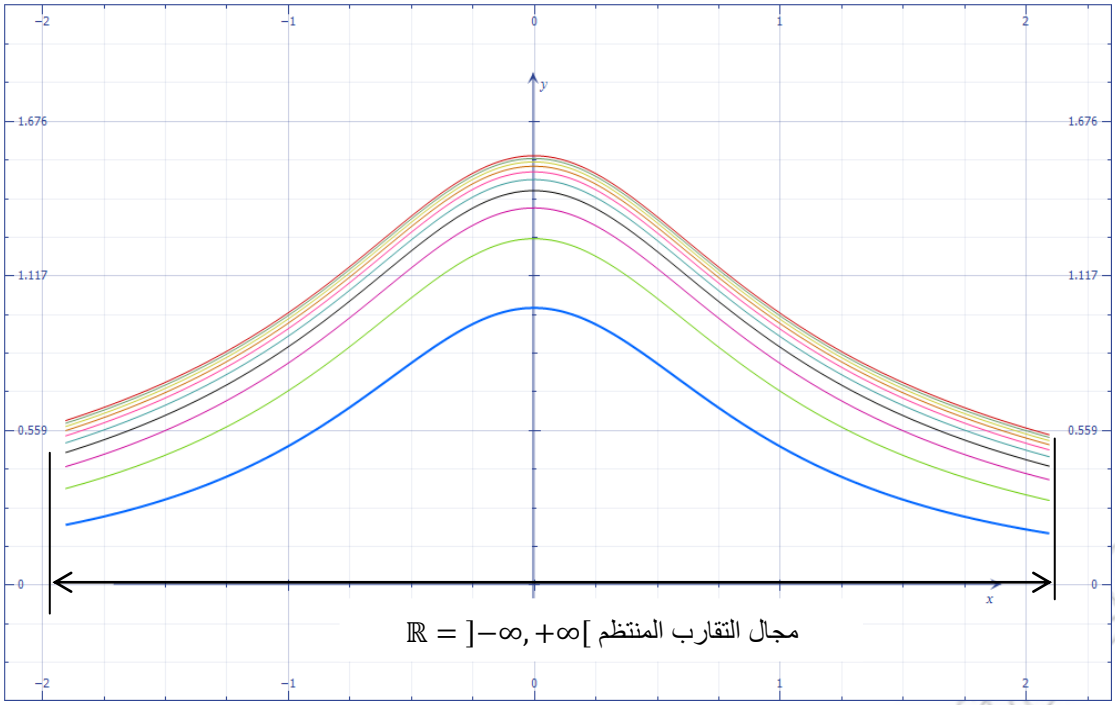
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$$



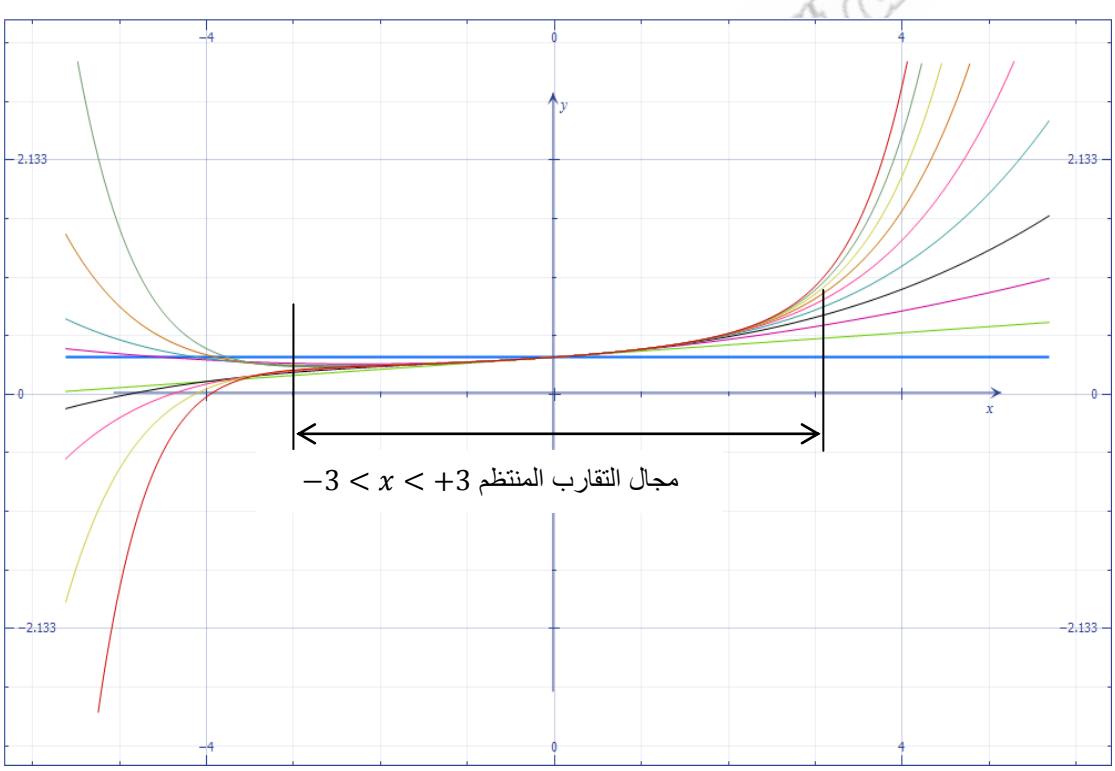
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$$



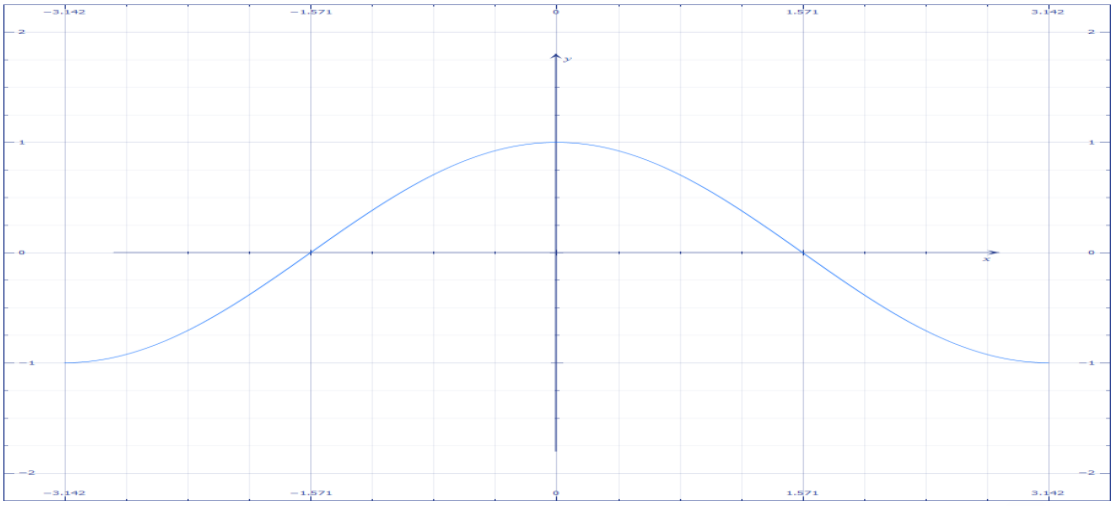
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$



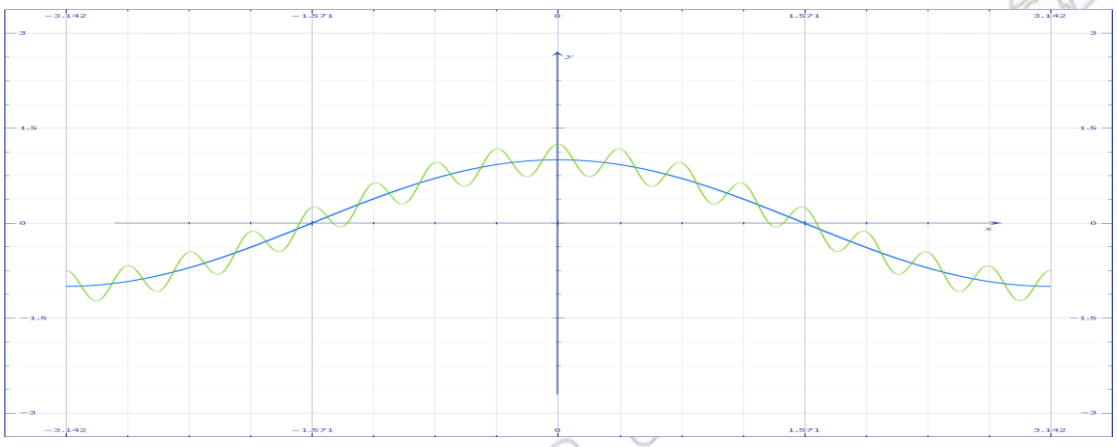
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n.3^n}$$



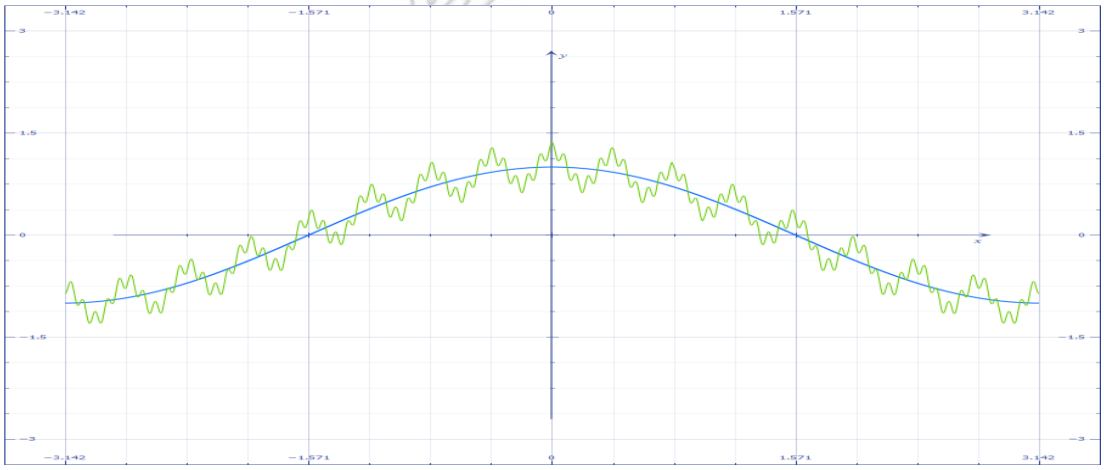
$$\sum_{n=1}^{1} \frac{cos(n^4 x)}{n^2} = \frac{cos(1^4 x)}{1^2}$$



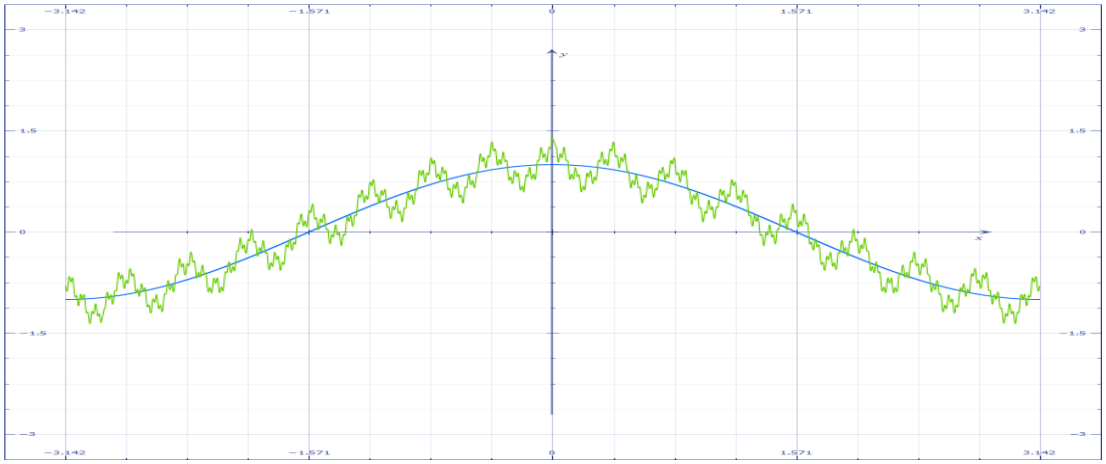
$$\sum_{n=1}^{2} \frac{cos(n^4x)}{n^2} = \frac{cos(1^4x)}{1^2} + \frac{cos(2^4x)}{2^2}$$



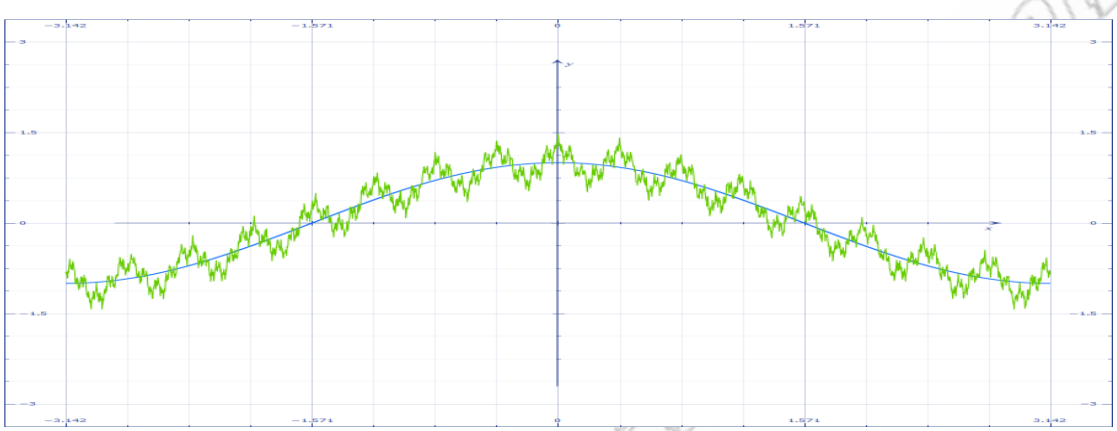
$$\sum_{n=1}^{3} \frac{cos(n^4x)}{n^2} = \frac{cos(1^4x)}{1^2} + \frac{cos(2^4x)}{2^2} + \frac{cos(3^4x)}{3^2}$$



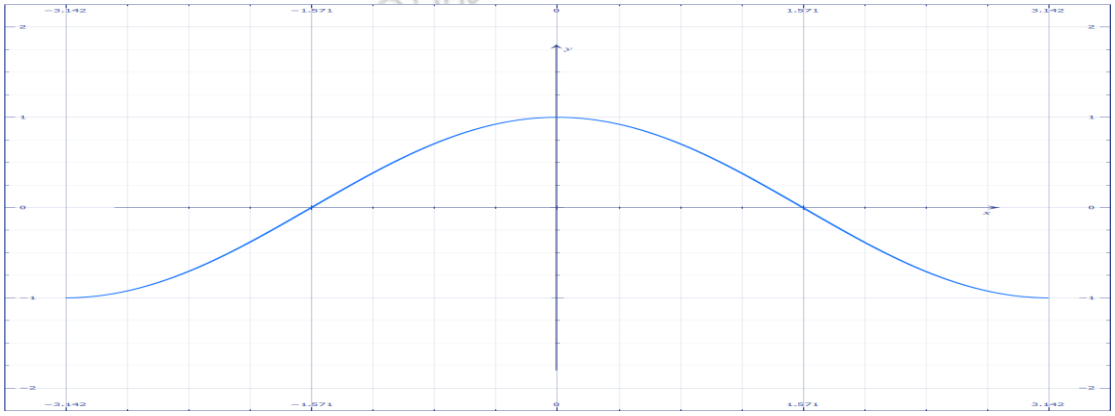
$$\sum_{n=1}^{4} \frac{cos(n^4x)}{n^2} = \frac{cos(1^4x)}{1^2} + \frac{cos(2^4x)}{2^2} + \frac{cos(3^4x)}{3^2} + \frac{cos(4^4x)}{4^2}$$



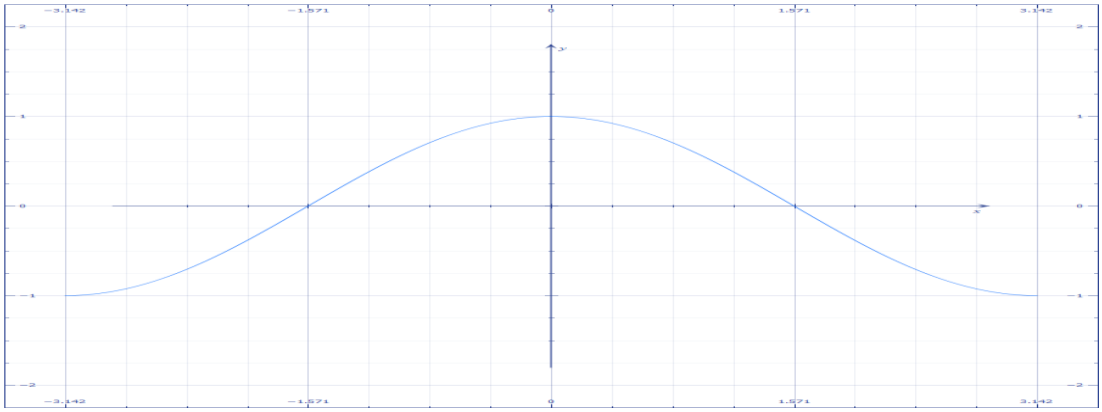
$$\sum_{n=1}^{8} \frac{cos(n^4x)}{n^2} = \frac{cos(1^4x)}{1^2} + \frac{cos(2^4x)}{2^2} + \frac{cos(3^4x)}{3^2} + \frac{cos(4^4x)}{4^2} + \frac{cos(5^4x)}{5^2} + \frac{cos(6^4x)}{6^2} + \frac{cos(7x)}{7^2} + \frac{cos(8^4x)}{8^2}$$



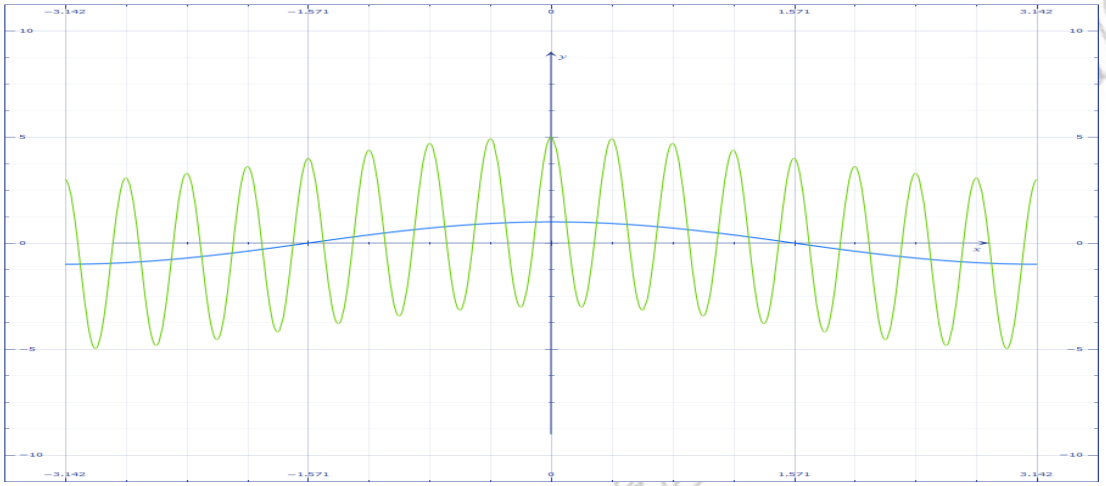
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n^4x)}{n^2}$$



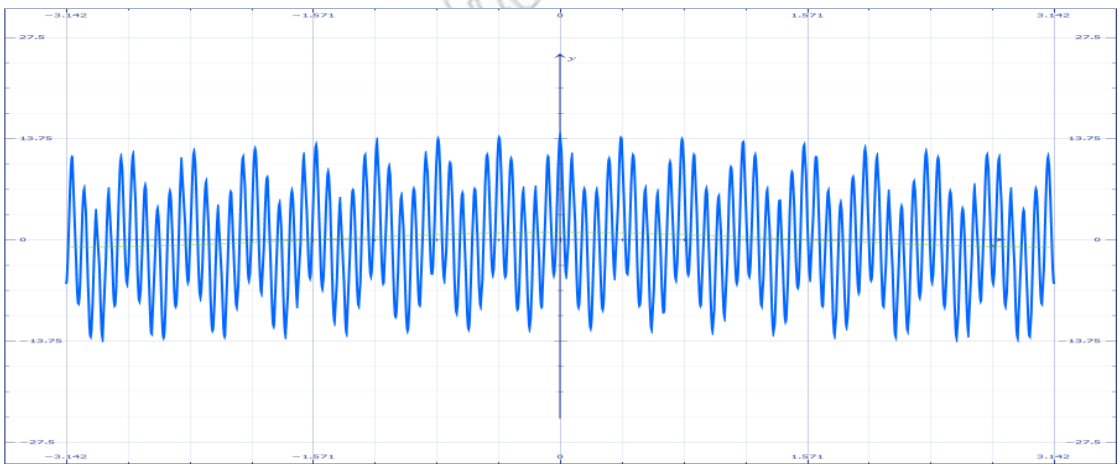
$$\sum_{n=1}^{1} n^2\, cos(n^4x) = 1^2(cos1^4x)$$



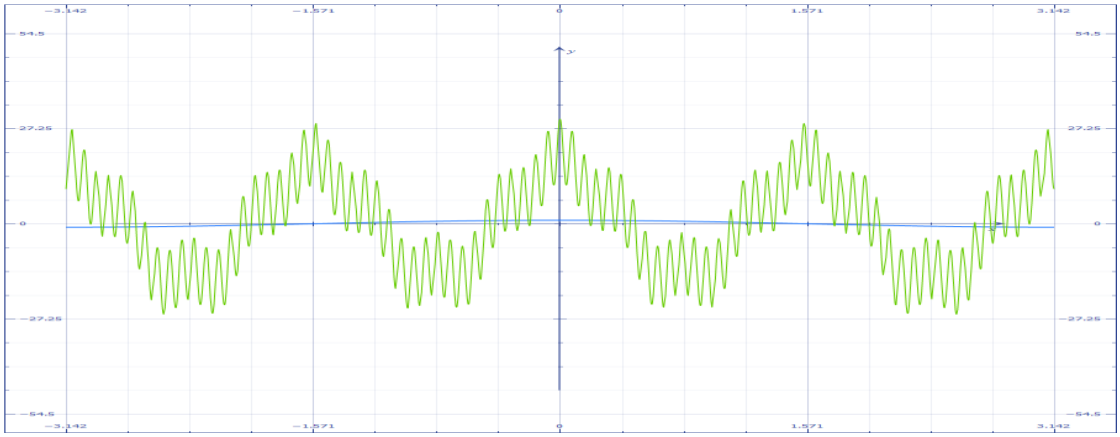
$$\sum_{n=1}^{2} n^2\, cos(n^4x) = 1^2(cos1^4x) + 2^2(cos2^4x)$$



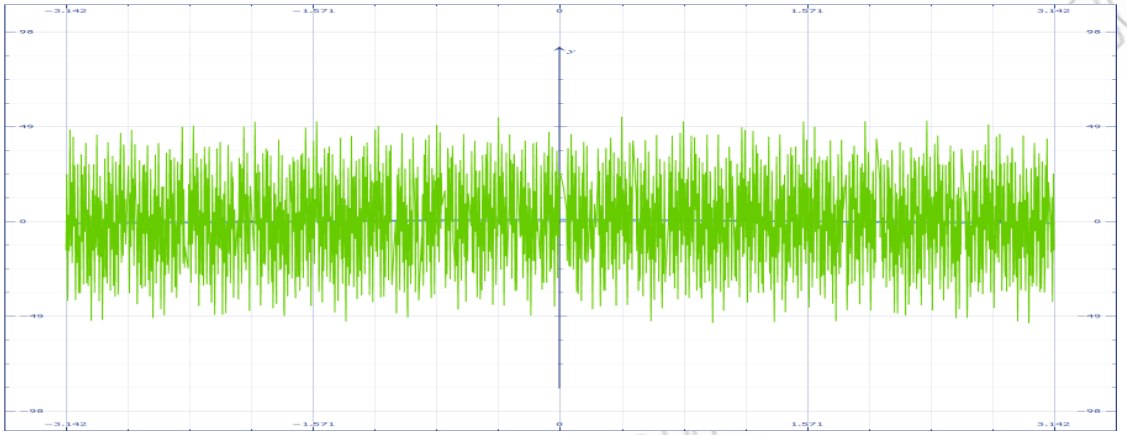
$$\sum_{n=1}^{3} n^2\, cos(n^4x) = 1^2(cos1^4x) + 2^2(cos2^4x) + 3^2(cos3^4x)$$



$$\sum_{n=1}^{4} n^2\, cos(n^4x) = 1^2(cos1^4x) + 2^2(cos2^4x) + 3^2(cos3^4x) + 4^2(cos4^4x)$$



$$\sum_{n=1}^{5} n^2 \cos(n^4 x) = 1^2(\cos 1^4 x) + 2^2(\cos 2^4 x) + 3^2(\cos 3^4 x) + 4^2(\cos 4^4 x) + 5^2(\cos 5^4 x)$$



نستنتج في الأخير أن سلاسل الدوال :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^4 x)}{n^2}$$ متقاربة

$$\sum_{n=1}^{5} n^2 \cos(n^4 x)$$ متباعدة

fb/mehla ab

تمارين:

التمرين الأول : ما هي قيم x التي تحقق التقارب المطلق للسلاسل الآتية : حيث a ثابت حقيقي

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \ (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)} \ (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^n \ (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-a)^n \ (4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n.3^n} \ (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \ (6)$$

التمرين الثاني : أوجد مجال تقارب للمقدار:

$$S(x) = (1-x) + x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots + x^n(1-x) + \cdots$$

التمرين الثالث : التقارب المنتظم وغير المنتظم لسلسلة دالة.

نعرف أولا متتالية الدوال : $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{R}}$ و ثانيا سلسلة الدوال $\sum u_n(x)$ معرفتين على المجال $[a,b]$

$$\{\forall\varepsilon > 0, \exists p > 0, \forall x \in [a,b] : \quad n \geq p \ \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon\} \Leftrightarrow \left\{\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)\right\}$$

$$\left\{\forall\varepsilon > 0, \exists p > 0, \forall x \in [a,b] : n \geq p \ \Rightarrow \left|\sum u_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \left\{\sum u_n(x) = S(x)\right\}$$

الحالة 1 (**تقارب منتظم**) **:** p تتعلق بـ ε ولا تتعلق بـ x. الحالة 2 (**تقارب غير منتظم**) **:** p تتعلق بـ و x.

المطلوب:

أولا: ما هي شروط ويراستراس ($Weierstrass$)و شروط دريكلي($Dirichlet$) للتقارب المنتظم الخاص بسلاسل الدوال ؟

ثانيا: أدرس التقارب المنتظم للسلاسل بمعيار ويراستراس ($Weierstrass$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4} \ (1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} \ (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \ (4)$$

التمرين الرابع : لدينا سلسلة الدوال التالية: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(n^4x)}{n^2}$

1) باستعمال شروط ويراستراس برهن أن السلسلة $S(x)$ متقاربة بانتظام على مجال يطلب تعينه .

2) أحسب $S'(x)$ مشتق الدالة $S(x)$ ، ثم أثبت أن $S'(x)$ سلسلة دوال متباعدة $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) ماذا تستنتج بالنسبة لاشتقاق سلاسل الدوال المتقاربة بانتظام ؟

4) أدرس زوجية وفردية العدد الطبيعي n^4 انطلاقا من زوجية وفردية n .ثم استنتج قيم $\cos n^4\pi$ حسب قيم n .

5) أثبت قيمة التكامل التالي: $I = \int_{x=0}^{\pi} S(x)dx = \frac{1}{32}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.هل التكامل متقارب ؟

fb/mehla abderrahmane

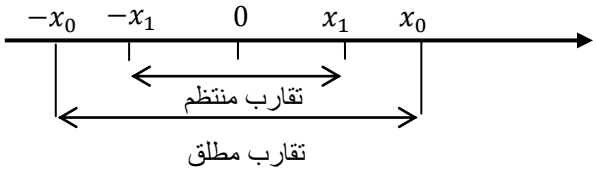
التمرين الخامس : سلاسل القوى (السلاسل الصحيحة– *les séries entiers*) .

نسمي سلسلة قوى أو سلسلة صحيحة كل سلسلة دوال لها الشكل التالي:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

حيث $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ ثوابت معطاة نسميها عوامل السلسلة الصحيحة.

برهن أنه إذا كانت السلسلة تتقارب عند $x=x_0$ أثبت أنها:



1) تتقارب مطلقا من أجل القيم $|x|<|x_0|$.

2) تتقارب بانتظام من أجل القيم $|x|\le|x_1|$ حيث : $|x_1|<|x_0|$.

التمرين السادس: استعمال سلاسل الدوال ونشر تايلور وماك لوران في حساب تكامل .

1) أوجد السلسلة المقاربة للتكامل التالي: $I(a,b)=\int_a^b e^{-x^2}dx$ باستعمال نشر ماك لوران .

2) نضع $a=-x;\quad b=x$ أوجد سلسلة الدالة الموافقة للتكامل $I(a,b)=I(x)$.

3) أحسب التكامل $I(a,b)$ عندما $x\to+\infty$ وباستعمال تحويل الإحداثيات من الديكارتية إلى القطبية.

4) استنتج النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n\ge0}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^n=\frac{\pi}{2}$

5) أحسب التكامل التالي: $I(a,b)=\int\limits_a^b\frac{dt}{1+t}$ بالاعتماد على نشر ثنائي حد نيوتن.

6) أوجد نشر ماك لوران للدالة $f(x)=\sin(x)$، $g(x)=\cos(x)$ باستعمال عبارة أولر $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

أحسب التكامل التالي: $I(a,b)=\int\limits_a^b\frac{\sin(x)dx}{x}$ بالاعتماد على نشر ماك لوران.

التمرين السابع : السلاسل الصحيحة ذات المتغير المركب

باعتبار السلسلة الصحيحة ذات متغير مركب(عقدي) هي سلسلة دالة لها الشكل العام $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ حيث $(a_n)_{n\in N}$ متتالية ،

يوجد دوما عدد حقيقي موجب R له الخواص التالية :

إذا كانت طويلة العدد المركب $|z|<R$ فأن السلسلة متقاربة .

إذا كانت طويلة العدد المركب $|z|>R$ فأن السلسلة متباعدة .

1) أوجد نصف قطر تقارب السلسلة التالية : $S_1(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$. حيث $z=x+iy$ عدد مركب و $(x,y)\in\Re^2$.

fb/mehdi abderrahmane

2) برهن أن السلسلة الصحيحة التالية متقاربة $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.ثم أوجد نصف قطر تقاربها .

أوجد نصف قطر التقارب السلسلة $S_3(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n!z^n$.

التمرين الثامن : نشر ماك لوران لدالة $f(x)=(1+x)^m$.

1) برهن أن على صحة المعادلة $(1+x)f'(x)=mf(x)$ $(*)$ - - - - -

2) نضع $f(x)=1+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ ، استعمل المعادلة $(*)$ لإيجاد السلسلة المرافقة.

استعمل نشر ماك لوران بجوار الصفر للدالة.

fb/mehda abderrahmane

7-السلاسل الصحيحة أو سلاسل القوى:

7-1) تعريف السلاسل الصحيحة :

نسمي سلسلة صحيحة أو سلسلة قوى كل سلسلة دوال لها الشكل التالي:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

حيث $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ ثوابت معطاة نسميها عوامل السلسلة الصحيحة.

7-2) نظرية آبل لتقارب سلسلة صحيحة :

إذا كانت السلسلة $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_nx^n$ تتقارب عند $x=x_0$ فأنها:

1) تتقارب مطلقا من أجل القيم $|x|<|x_0|$.

2) تتقارب بانتظام من أجل القيم $|x|\le|x_1|$ حيث : $|x_1|<|x_0|$

1) البرهان : حسب النظرية نعتبر السلسلة متقاربة عند $x=x_0$:

$$S(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0{}^n=a_0+a_1x_0+a_2x_0{}^2+\cdots+a_nx_0{}^n+\cdots$$

تكون السلسلة متقاربة من أجل $x=x_0$ عندما يكون:

$$\lim_{n\to\infty}(a_nx_0{}^n)=0$$

و منه يوجد عدد حقيقي موجب غير معدوم M حيث أن : كل الحدود بالقيمة المطلقة أقل من M أي :

$|a_nx_0{}^n|<M$

و منه السلسلة الصحيحة $S(x)$ تصبح :

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0{}^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

$$a_0+a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right)+a_2x_0{}^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\cdots+a_nx_0{}^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n+\cdots$$

الحدود بالقيمة المطلقة:

fb/mehdi abderrahmane

$$a_0 + a_1 x_0 \left|\frac{x}{x_0}\right| + a_2 {x_0}^2 \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + a_n {x_0}^n \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots$$

$$S(x) < M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots$$

$$\Rightarrow S(x) < M\left(1 + \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow S(x) < M\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\right) = Mg(x)$$

السلسلة $g(x)$ سلسلة هندسية أساسها $\left|\frac{x}{x_0}\right|$ و تكون متقاربة إذا كان :

$$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < |x_0|$$

وانتهى البرهان على أن السلسلة تتقارب مطلقا من أجل القيم $|x| < |x_0|$.

2) البرهان : من الجزء الأول من النظرية

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < M\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n\right) = Mg(x)$$

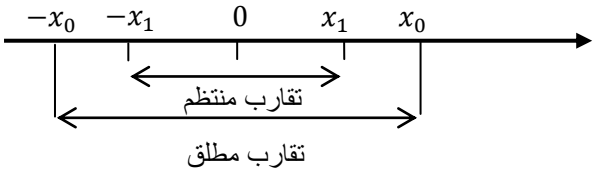
$$S(x) < g(x)$$

باستعمال اختبار وايرستراس نستنتج أنه يوجد سلسلة مسيطرة على السلسلة $S(x)$ و هي السلسلة الهندسية $g(x)$ من أجل عدد حقيقي x_1 حيث أن الاختبار يشترط أن تكون هناك سلسلة ثوابت مسيطرة و هذه السلسلة متقاربة ، ومنه تقارب السلسلة $g(x_1)$ يتحقق لنا في المجال التالي :

$$g(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x_1}{x_0}\right| < 1 \quad \Rightarrow |x_1| < |x_0|$$

ومنه نستنتج أن السلسلة الصحيحة $S(x)$ تتقارب بانتظام في المجال $|x| \leq |x_1|$

حيث $|x_1| < |x_0|$.



وانتهى البرهان على أن السلسلة تتقارب بانتظام من أجل القيم $|x| < |x_1|$ حيث : $|x_1| \leq |x_0|$

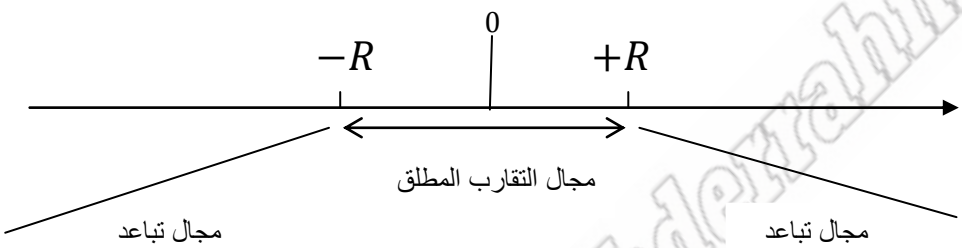
fb/mehdi abderrahmane

خلاصة: كل سلسلة صحيحة تكون متقاربة بانتظام في مجال يكون داخل مجال تقاربها ، و مجال تقاربها له منتصف مركز المعلم O من أجل $x = 0$.

7 – 3) مجال تقارب السلسلة الصحيحة :

نسمي مجال تقارب السلسلة الصحيحة $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_n x^n$ المجال المحصور بين القيمتين $R-$ و $+R$ حيث تكون السلسلة متقاربة مطلقا، و تكون متباعدة خارج هذا المجال . نسمي R نصف قطر تقارب السلسلة الصحيحة. لكن في القيم $x = -R$ و $x = +R$ يطرح إشكال التقارب أو التباعد و يخضع لحالات خاصة. ويوجد حالتين واضحتين :

- حالة التباعد : $R = 0$ ، متباعدة على كل قيم $x \in]-\infty, +\infty[$.
- حالة التقارب: $R = \infty$ ، متقاربة على كل قيم $x \in]-\infty, +\infty[$.



البرهان: نفرض السلسلة الصحيحة $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_n x^n$

ندرس التقارب المطلق للسلسلة أي ندرس تقارب :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x^n|$$

نستعمل معيار النسبة:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}||x^{n+1}|}{|a_n||x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$\Rightarrow L = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\ell$$

تكون متقاربة عندما $L < 1$:

$$L < 1 \;\Rightarrow\; |x|\ell < 1 \;\Rightarrow\; |x| < \frac{1}{\ell}$$

fb/mehda abderrahmane

و منه تكون السلسلة متقاربة عندما يكون $-\frac{1}{\ell} < x < +\frac{1}{\ell}$ ، و متباعدة في المجال $x > +\frac{1}{\ell}$ و المجال $x < -\frac{1}{\ell}$ ،

ونستنتج أن نصف قطر التقارب المطلق للسلسلة الصحيحة هو :

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

و يمكن تعميمه على معيار الجذر النوني:

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

مثال 1: تحديد مجال التقارب للسلسلة الصحيحة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < +1$$

نصف قطر التقارب هو $R = 1$.

- من أجل $x = +1$ تصبح السلسلة متباعدة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = +\infty$$

- من أجل $x = -1$ تصبح السلسلة متباعدة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - \cdots = \begin{cases} 0 & n \text{ فردي} \\ +1 & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

مثال 2: تحديد مجال التقارب للسلسلة الصحيحة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2x)^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n} + \cdots$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+2}\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|(-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right||2x| = |2x| = 2|x|$$

fb/mehdi abderrahmane

$$2|x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \; R = \frac{1}{2}$$

مثال 3: تحديد مجال التقارب للسلسلة الصحيحة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| |x|$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \; |x| = 0 < 1 \;\; : \;\; \forall x \in \,]-\infty, +\infty[\;\; \Rightarrow \;\; R = \infty$$

مثال 4: تحديد مجال التقارب للسلسلة الصحيحة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n = 1 + x + \cdots + (nx)^n + \cdots$$

السلسلة تتباعد لأن $\lim_{n\to\infty}(nx) \;\; = +\infty$ من أجل كل الأعداد الحقيقية غير المعدومة ، أي مجال التقارب يتمثل في نقطة $x = 0$ و $R = 0$

7-4) السلاسل الصحيحة لـ $(x - x_0)$:

نسمي كذلك السلسلة من الشكل :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

7-5) مجال التقارب للسلاسل الصحيحة لـ $(x - x_0)$:

نستعمل معيار النسبة :

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n(x - x_0)^n|}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x - x_0| < 1$$

fb/mehda abderrahmane

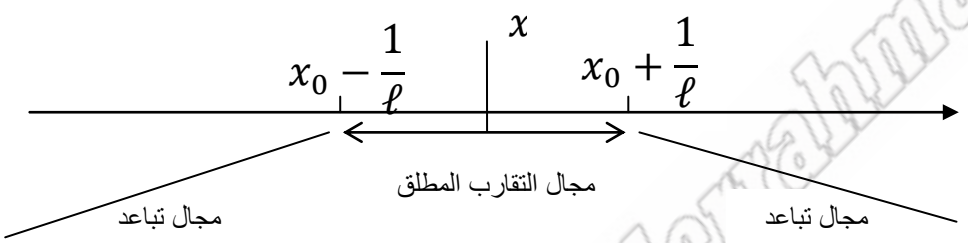
$$|x-a| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\ell}$$

$$-\frac{1}{\ell} < (x-x_0) < +\frac{1}{\ell}$$

$$x_0 - \frac{1}{\ell} < x < x_0 + \frac{1}{\ell}$$

$$R = \frac{\left(x_0 + \frac{1}{\ell}\right) - \left(x_0 - \frac{1}{\ell}\right)}{2} = \frac{1}{\ell}$$

$$Centre = \frac{\left(x_0 + \frac{1}{\ell}\right) + \left(x_0 - \frac{1}{\ell}\right)}{2} = x_0$$



مثال 1: تحديد مجال التقارب للسلسلة الصحيحة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n \quad ; \quad a_n = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = (x-2) + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^n + \cdots$$

$$-\frac{1}{\ell} < (x-2) < +\frac{1}{\ell}$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

$$-1 < (x-2) < +1$$

$$1 = (2-1) < x < (2+1) = 3$$

fb/mehdi abderrahmane

8) نشر الدوال باستعمال سلاسل الدوال :

8 – 1) نظرية تايلور:

نعتبر الدوال f ،f'،f'' ... $f^{(n+1)}$ مستمرة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $|x - | < R$:، يوجد عدد حقيقي بين العددين a وx :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

حيث كثير حدود تايلور من الدرجة n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

الباقي له شكلين :

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$ شكل لاغرانج

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)(x-c)^n}{(n)!}$$ شكل كوشي

بعض سلاسل الدوال الأسية واللوغاريتمية :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$a^x = e^{x\,lna} = 1 + x\,lna + \frac{(x\,lna)^2}{2!} + \frac{(x\,lna)^3}{3!} + \frac{(x\,lna)^4}{4!} + \cdots \quad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad ; \quad -1 < x \leq +1$$

$$\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \quad ; \quad -1 < x < +1$$

$$ln(x) = \left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 \ldots\right\} \quad ; \quad x > 0$$

$$ln(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 \ldots \quad ; \quad x > \frac{1}{2}$$

fb/mehda abderrahmane

بعض سلاسل الدوال المثلثية :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} ; |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!} \quad ; \quad 0 < |x| < \pi$$

8 – 2) سلاسل ثنائي حد :

ليكن m عدد حقيقي و $|x| < 1$ لدينا:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

حيث معامل ثنائي حد :

$$C_n^k = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

بعض سلاسل ثنائي حد :

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$

من أجل $-1 < x < +1$:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots$$

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \cdots$$

من أجل $-1 < x \leq +1$:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 - \cdots$$

fb/mehda abderrahmane

$$(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4 - \cdots$$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3.6}x^2 + \frac{2.5}{3.6.9}x^3 - \frac{2.5.8}{3.6.9.12}x^4 + \cdots$$

تمارين:

التمرين الأول: أحسب نصف قطر تقارب سلاسل القوى(*séries de puissance*) التالية :

1. $\boldsymbol{S_1(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{x^n} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

2. $\boldsymbol{S_2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x^n}}{\boldsymbol{n!}} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

3. $\boldsymbol{S_3(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{(-1)^{n+1}(2x)^n}}{\boldsymbol{n}} = \frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n} + \cdots$

4. $\boldsymbol{S_4(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x^n}}{\boldsymbol{(n+1).3^{n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x^{n-1}}}{\boldsymbol{n.3^n}} = \frac{1}{1.3^1} + \frac{x}{2.3^2} + \frac{x}{3.3^3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n.3^n} + \cdots$

التمرين الثاني: لتكن سلسلة القوى في شكلها العام $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_n x^n$

1) أحسب $S'(x)$ مشتق $S(x)$.و أحسب $F(x)$ التكامل غير المحدود لـ $S(x)$.

2) أحسب ${}_1$ و R_2 و R_3 (نصف قطر تقارب $S(x)$ و $S'(x)$ و $F(x)$ على الترتيب).ماذا تستنتج ؟

3) أحسب التكامل المحدود التالي:

$$I(\alpha,\beta) = \int_{x=\alpha}^{\beta} S(x)dx$$

4) برهن أن شرط تقارب التكامل $I(\alpha,\beta)$ هو: $-R < \alpha < +R$ و $-R < \beta < +R$.

5) لتكن سلسلة القوى في شكلها العام $M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ ،

أعد الإجابة على الأسئلة 1،2،3،4 على السلسلة $M(x)$.

التمرين الثالث :

1) باستعمال نشر ثنائي حد أوجد نشرا للعبارة التالية $(a+b)^n$ بدلالة العدد الطبيعي n و الثوابت a,b.

2) استنتج نشر للأشكال التالية : $(1+x)^n$ ، $(1+x)^{\frac{k}{p}}$ ، $(1+x^r)^{\frac{k}{p}}$ حيث n,r,p,k أعداد طبيعية و x عدد حقيقي .

3) باستعمال نشر ثنائي حد أوجد نشر للدالة التالية: $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ حيث x عدد حقيقي $x \in]-1,+1[$

4) إذا عرفنا الدالة العكسية للدالة جيب المعرفة كما يلي :

$$g(x) = arcsin(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

أوجد سلسلة مرافقة للدالة $g(x)$.

5) لتكن السلسلة التالية :

fb/mehda abderrahmane

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}\frac{1}{(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}\frac{1}{(2n+1)}$$

برهن باستعمال معيار مناسب أن السلسلة S متقاربة . و باستعمال قيمة الدالة $g(1)=\frac{\pi}{2}$ أوجد قيمة للسلسلة S.

6) بنفس الطريقة أوجد نشر للدوال التالية :

$$L(x)=arccos(x)\,,\quad M(x)=arctg(x)\,,\ N(x)=arccotg(x)\,,\quad P(x)=ln(x+1)\,,\quad Q(x)=\sqrt{x+1}$$

ثم بين أن قيم سلاسل الثوابت التالية هي :

$$M=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}\ ,P=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2\,,\qquad Q=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6.8\dots(2n+2)}=\sqrt{2}-\frac{3}{2}$$

fb/mehda abderrahmane

9- تعريفات خاصة بسلاسل فوريه

9-1) تعريف سلاسل فوريه الموافقة لدالة دورية دورها 2π :

سلسلة فوريه الموافقة للدالة الدورية (x) التي دورها 2π و المعرفة في المجال $-\pi \leq x \leq \pi$ ، حيث $\pi = 3{,}14 > 0$ ثابت . يكون نشر الدالة الدورية (x) مع M القيمة المتوسطة للسلسلة :

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx \quad \text{أو} \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx \quad \text{أو} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \quad ; \quad M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{a_0}{2}$$

9-2) تعريف سلاسل فوريه الموافقة لدالة دورية دورها $2L$:

تعميم للدالة الدورية التي دورها 2π ،نعتبر سلسلة فوريه الموافقة للدالة الدورية $f(x)$ التي دورها $2L$ و المعرفة في المجال $c \leq x \leq c + 2L$ ، أي L هو تعميم للقيمة π . حيث c هو قيمة كيفية و لتبسيط الحساب نأخذ :

$c = -\pi$ و L ثابت حقيقي موجب $L > 0$ ، و عوامل السلسلة الموافقة :

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\ dx \quad \text{أو} \quad a_k = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\ dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\ dx \quad \text{أو} \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\ dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\ dx \ ; \ M = \frac{1}{2L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\ dx = \frac{a_0}{2}$$

9-3) تقارب سلاسل فوريه الموافقة لدالة دورية:

سلاسل فوريه من الشكل العام الخاص بالدالة الدورية (x) التي دورها $2L$:

fb/nehla chaterahmane

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

هي سلاسل مثلثية عواملها $\frac{a_0}{2}$ و a_n و b_n ، ندرس بمعيار وايستراس التقارب المنتظم: و تكون السلسلة المثلثية $\sum u_n(x)$ متقاربة بانتظام على مجال تعريف الدالة الدورية $f(x)$ إذا وجدت متتالية عددية M_n الموجبة الحدود تحقق :**الشرط الأول** : $|u_n(x)|\leq M_n$.**الشرط الثاني** : $\sum M_n$ سلسلة عددية متقاربة .

البرهان:

الشرط الأول : محقق

$$\left|a_n\cos\frac{n\pi x}{L}\right|\leq|a_n| \quad ; \quad \left|b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right|\leq|b_n|$$

$$\Rightarrow\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|\leq\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$$

الشرط الثاني : محقق إذا كانت $\sum M_n$ سلسلة عددية متقاربة .

$$\sum M_n=\left|\frac{a_0}{2}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|=\left|\frac{a_0}{2}\right|+|a_1|+|b_1|+|a_2|+|b_2|+\cdots$$

و يتم الاختبار على السلسلة $\sum M_n$

10- حساب معاملات سلاسل فوريه

10- 1) حساب التكاملات المساعدة لحساب معاملات السلسلة:

نعتبر الدور 2π و $c=-\pi$ لتبسيط الحسابات :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{n}(\sin n\pi-\sin(-n\pi))=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=\left.\frac{-\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{-1}{n}(\cos n\pi-\cos(-n\pi))=0$$

و منه تكامل الدوال المثلثية من $-\pi$ إلى π معدوم .

fb/mehda abderrahmane

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(n-k)x + \cos(n+k)x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x\, dx\right)$$

$$= \frac{\sin(n-k)x}{(n-k)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n+k)x}{(n+k)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

و بنفس الطريقة نستنتج في الأخير التكاملات المساعدة في حالة $n \neq k$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{\cos} nx\, \boldsymbol{\cos} kx\, dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{\sin} nx\, \boldsymbol{\sin} kx\, dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{\cos} nx\, \boldsymbol{\sin} kx\, dx = 0 \end{aligned}}$$

حيث لدينا دساتير التحويل التالية:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\cos} nx\, \boldsymbol{\cos} kx &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\cos}(n-k)x + \boldsymbol{\cos}(n+k)x) \\ \boldsymbol{\sin} nx\, \boldsymbol{\sin} kx &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\cos}(n-k)x + \boldsymbol{\cos}(n+k)x) \\ \boldsymbol{\sin} nx\, \boldsymbol{\cos} kx &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sin}(n-k)x + \boldsymbol{\sin}(n+k)x) \end{aligned}}$$

و بنفس الطريقة نحسب التكاملات الخاصة التالية :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} (1)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\, dx\right] = \frac{1}{2}[2\pi + 0] = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} (1)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\, dx\right] = \frac{1}{2}[2\pi - 0] = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin(n-n)x + \sin(n+n)x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 0.\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}[0 + 0] = 0$$

الخلاصة : التكاملات المساعدة في حالة $n = k$

f/mehdi abderrahmane

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{cos^2}\, nx\, dx = \pi\\&\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{sin^2}\, nx\, dx = \pi\\&\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{sin}\, nx\, \boldsymbol{cos}\, nx\, dx = 0\end{aligned}}$$

10 – 2) حساب معاملات السلسلة:

أولا : حساب a_0: نعتبر السلسلة التالية الموافقة للدالة الدورية دورها 2π:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نحسب التكامل التالي :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx)\right]dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(b_n \sin nx)\right]dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \left[\frac{a_0}{2}\right]\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\right]dx + 0 + 0 = \frac{a_0}{2}(2\pi) = a_0\pi$$

$$\boxed{\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}}$$

ثانيا: حساب $_n$: نعتبر السلسلة التالية الموافقة للدالة الدورية دورها 2π:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نحسب العبارة التالية: $f(x)\cos kx$

fb/mehdia abderrahmane

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

نحسب تكامل العبارة التالية: $f(x)\cos kx$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}.0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx\,dx\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx\,dx\right) = a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos 1x \cos kx\,dx + a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x \cos kx\,dx + \cdots$$

عندما $n = k$ يصبح التكامل له قيمة π :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx\,dx\right) = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos kx\,dx = a_k\pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx\,dx\right) = b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin 1x \cos kx\,dx + b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx\,dx + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx\,dx\right) = 0 \quad ; \quad \forall\, n = 1, \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\pi \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx}}$$

ثالثا: حساب $_n$: نعتبر السلسلة التالية الموافقة للدالة الدورية دورها 2π:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

نحسب العبارة التالية: $f(x)\sin kx$

$$f(x)\sin kx = \frac{a_0}{2}\sin kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx)$$

fb/mehda abderahmane

نحسب تكامل العبارة التالية: $f(x)\sin kx$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx)\, dx$$

$$= \frac{a_0}{2}.0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\, dx\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\, dx}\right) = b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin 1x \sin kx\, dx + b_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin kx\, dx + \cdots$$

عندما $n = k$ يصبح التكامل له القيمة π :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\, dx\right) = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin kx\, dx = b_k \pi$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\, dx}\right) = a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 1x \sin kx\, dx + a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\, dx + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\, dx\right) = 0 \quad ; \quad \forall\, n = 1, \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx = b_k \pi \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx}}$$

11- استمرار وانقطاع سلسلة فوريه

شروط دريكلي لاستمرار وانقطاع سلسلة فوريه

نفرض الشروط التالية :

1. الدالة $f(x)$ معرفة ووحيدة القيمة ما عدا عند أعداد محدودة من نقط في المجال $[-L, L]$.
2. الدالة $f(x)$ تكون دورية خارج المجال $[-L, L]$ بدورة $2L$.
3. الدالتان $f(x)$ و $f'(x)$ مستمرتان في المجال $[-L, L]$.

عندئذ نقول عند سلسلة فوريه الموافقة تتقارب إلى :

- قيمة الدالة $f(x)$ إذا كانت x نقطة استمرار.

fb/melda abderahmane

- القيمة $\frac{(x+0)+f(x-0)}{2}$ إذا كانت x نقطة انقطاع.

حيث $f(x+0)$ و $f(x-0)$ هما نهاية الطرف الأيمن و الأيسر للدالة $f(x)$ عند النقطة x و تمثل النهايتين التاليتين :

$$f(x+0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(x+\varepsilon)$$
$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to 0^-} f(x-\varepsilon)$$

12- مساواة بارسيفال:

12-1) مساواة بارسيفال الخاصة:

$$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} \left(f(x)\right)^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right)$$

$$L = \pi \;\Rightarrow\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right)$$

12-2) مساواة بارسيفال المعممة:

$$c_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)g(x)\, dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n c_n + b_n d_n)$$

$$L = \pi \Rightarrow c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n c_n + b_n d_n)$$

حيث أن المعاملات $_0$ وa_n و b_n معاملات السلسلة المرافقة للدالة $f(x)$ أي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

حيث أن المعاملات $_0$ وc_n و d_n معاملات السلسلة المرافقة للدالة $g(x)$ أي:

$$g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cos\frac{n\pi x}{L} + d_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

fb/mehla abderrahmane

12 – 3) برهان مساواة بارسيفال الخاصة:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\right)^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\right)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)^2 dx$$

$$\left(f(x)\right)^2 = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)^2$$

$$= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + 2\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)^2$$

$$\left(f(x)\right)^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + a_0\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

لدينا الحد الأخير من العبارة:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)^2$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)$$

$$= (a_1 \cos 1x + b_1 \sin 1x)\sum_{\substack{n=1\\n\neq 1}}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$+ (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)\sum_{\substack{n=1\\n\neq 2}}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$+ (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x)\sum_{\substack{n=1\\n\neq 3}}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots$$

$$+ (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \cdots$$

تكامل هذه الحدود الأخيرة من $-\pi$ إلى π يكون معدوما

$$+(a_1 \cos 1x + b_1 \sin 1x)^2 + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)^2 + (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x)^2 + \cdots$$

تكامل هذه الحدود الأخيرة من $-\pi$ إلى π يكون غير معدوما و يعطي القيمة π

fb/mehta abderrahmane

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\right)^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\right)^2dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 2\pi+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k\cos kx)^2+(b_k\sin kx)^2+2a_k\,b_k\cos kx\sin kx]\,dx$$

$$=\frac{(a_0)^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx)^2\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}(b_k\sin kx)^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}2a_k\,b_k\cos kx\sin kx\;dx\right]$$

$$=\frac{(a_0)^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k)^2\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx)^2\,dx+(b_k)^2\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kx)^2dx+2a_kb_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin kx\;dx\right]$$

$$=\frac{(a_0)^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k)^2\pi+(b_k)^2\pi+2a_kb_k.0]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\right)^2\,dx=\frac{(a_0)^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k)^2\pi+(b_k)^2\pi+2a_kb_k.0]$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\right)^2\,dx=\frac{(a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k)^2+(b_k)^2]}$$

13- نشر بعض الدوال الشهيرة :

مثال 1: ندرس الدالة الدورية التي دورها2π:

$$f(x)=\begin{cases}+1\,, & 0<x<\pi\\ -1\,, & -\pi<x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{\pi}(+1)\,dx\right]=\frac{1}{\pi}[(-x)|_{-\pi}^{0}+(+x)|_{0}^{\pi}]$$

$$=\frac{1}{\pi}[(0-\pi)+(\pi-0)]=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\;dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\;\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(+1)\cos nx\;dx\right]$$

fb/mehdi abderrahmane

$$a_n = \frac{1}{\pi n}[-\sin nx|_{-\pi}^{0} + \sin nx|_{0}^{\pi}] = \frac{1}{\pi}[-0+0] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\ \sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi}(+1)\sin nx\ dx\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n}[\cos nx|_{-\pi}^{0} - \cos nx|_{0}^{\pi}] = \frac{1}{\pi n}[(\cos 0 - \cos n\pi) - (\cos n\pi - \cos 0)]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n}[(1-\cos n\pi) - (\cos n\pi - 1)] = \frac{2}{\pi n}[1-\cos n\pi]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n] = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(2k+1)} & n = 2k+1 \\ 0 & n = 2k \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]\sin nx$$

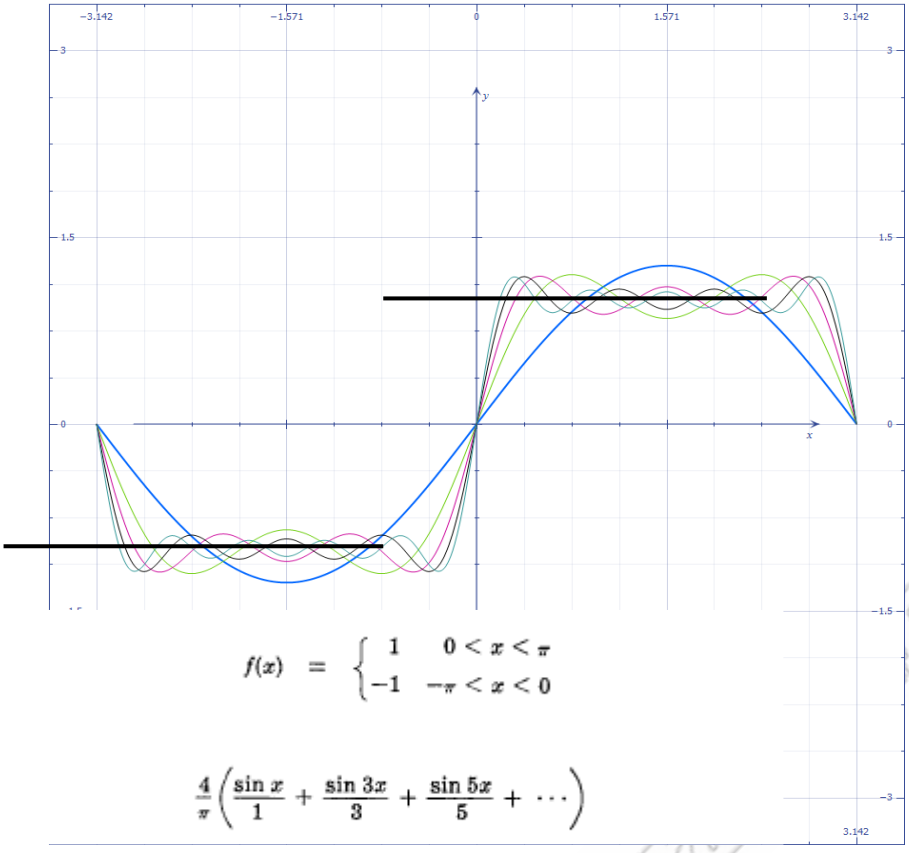
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)}[1-(-1)^{2n+1}]\sin nx$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+2)}[1-(-1)^{2n+2}]\sin nx$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)}[1-(-1)^{2n+1}]\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{(2n+1)}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{(2n+1)} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)}$$

fb/mehdi abderrahmane



تطبيق مساواة بارسيفال الخاصة:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\right)^2\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right)$$

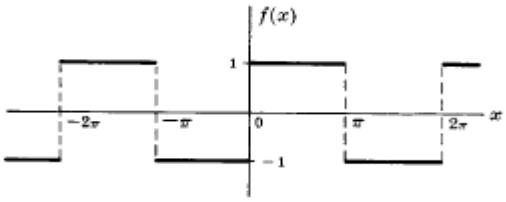
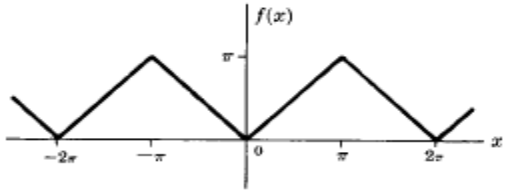
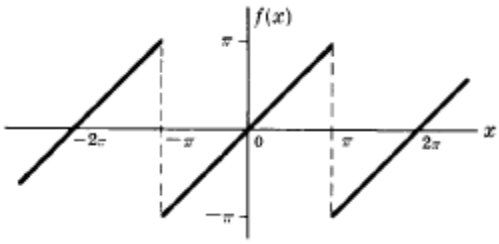
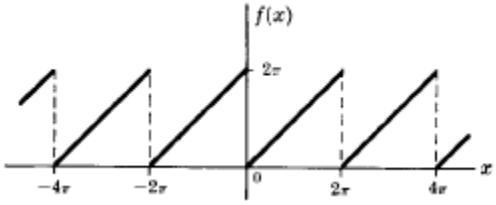
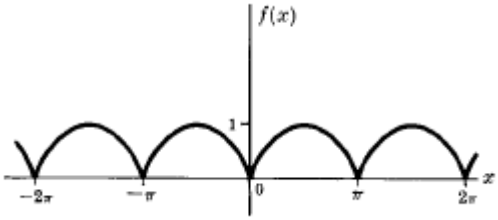
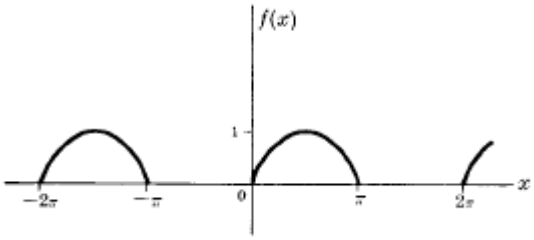
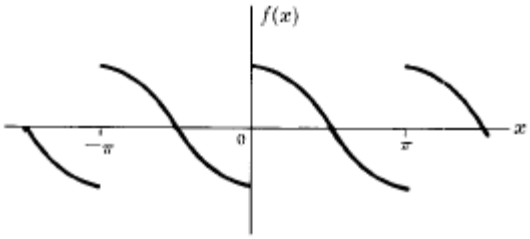
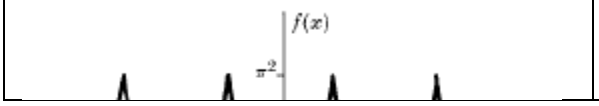
$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)^2\,dx + \int_{0}^{\pi}(+1)^2\,dx\right] = \frac{0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0^2 + \left(\frac{4}{\pi(2n+1)}\right)^2\right)$$

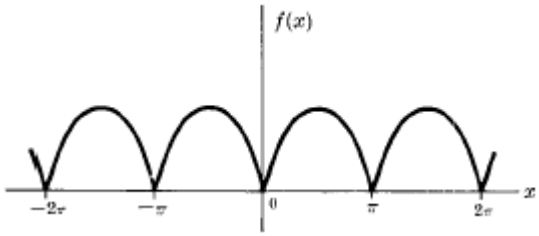
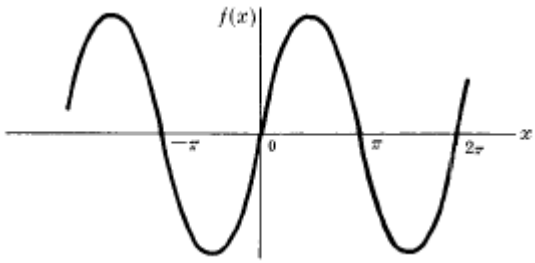
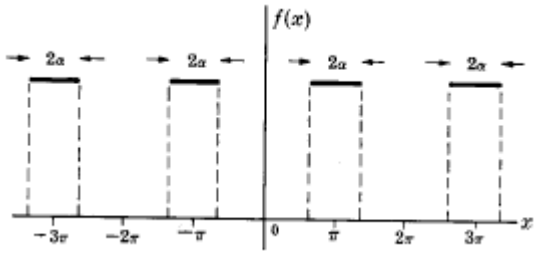
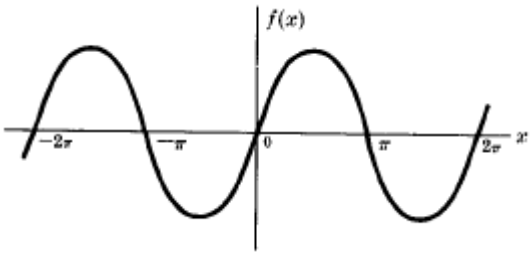
$$\frac{1}{\pi}[(0+\pi) + (\pi - 0)] = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2n+1)^2}$$

$$2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2n+1})^2} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{\mathbf{8}}$$

$$\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}^2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}^2} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}^2} \ldots = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{\mathbf{8}} = 1.2337005501362$$

fb/mehdi abderra ne

	$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$
	$f(x) = \lvert x \rvert = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$
	$f(x) = x, \ -\pi < x < \pi$ $2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$
	$f(x) = x, \ 0 < x < 2\pi$ $\pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right)$
	$f(x) = \lvert \sin x \rvert, \ -\pi < x < \pi$ $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$
	$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$
	$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ -\cos x & -\pi < x < 0 \end{cases}$ $\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{2 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{3 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \cdots\right)$
	$f(x) = x^2, \ -\pi < x < \pi$

	$\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$
	$f(x) = x(\pi - x), \ 0 < x < \pi$
	$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right)$
	$f(x) = x(\pi - x)(\pi + x), \ -\pi < x < \pi$
	$12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \cdots\right)$
	$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \pi - \alpha \\ 1 & \pi - \alpha < x < \pi + \alpha \\ 0 & \pi + \alpha < x < 2\pi \end{cases}$
	$\frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \alpha \cos x}{1} - \frac{\sin 2\alpha \cos 2x}{2} + \frac{\sin 3\alpha \cos 3x}{3} - \cdots\right)$
	$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & 0 < x < \pi \\ -x(\pi - x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$
	$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \cdots\right)$

14- الشكل العقدي لسلسلة فوريه:

14- 1) تعريف الشكل العقدي لسلسلة فوريه:

الشكل العقدي لسلسلة فوريه الموافقة لدالة دورية دورها $2L$ له العبارة التالية

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/L} \\ c_n &= \frac{1}{2L}\int_{c}^{c+2L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx \end{aligned}}$$

الشكل العقدي لسلسلة فوريه الموافقة لدالة دورية دورها 2π له العبارة التالية

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \end{aligned}}$$

و المعامل c_n يأخذ القيم التالية:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & ; n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & ; n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & ; n = 0 \end{cases}$$

14- 2) البرهان على الشكل العقدي لسلسلة فوريه:

الشكل العقدي لسلسلة فوريه الموافقة لدالة دورية دورها 2π له العبارة التالية

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)$$

fb/mehda abderrahmane

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)-ib_n\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{inx}+\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-inx}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-inx}$$

بالنسبة للمجموع في الحد الثالث نقوم بعملية إسناد لـ n إلى $-n$:

$$f(x)=\left(\frac{a_0}{2}\right)e^{i.0.x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}\right)e^{inx}$$

$c_n=\frac{a_0}{2}$	$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$	$c_n=\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}$

و نستنتج أن السلسلة لها الشكل العقدي التالي:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$$

fb/mehda abderrahmane

15- علاقات خاصة بتحليل الأشعة

15 – 1) تعريف (المقدار الشعاعي و السلمي): إن مختلف المقادير في الطبيعة التي تدرس في علم الفيزياء كدرجة الحرارة و الحجم و السرعة تعطى بأرقام حقيقية، ونسميها مقادير **سلمية**.

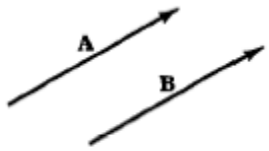
أما المقادير الأخرى كالقوة وشعاع السرعة و كمية الحركة التي لها اتجاه و طويلة (شدة) نسميها مقادير **شعاعية (متجهة)** .

ترميز خاص بالشعاع: نرمز للشعاع بالرمز $\overrightarrow{\ }$ و له الخواص التالية:

- **طويلة:** $\|\vec{A}\|$ و اختصارا نرمز لها A .
- **اتجاه:** يحدد بيانيا في وجود محور أو معلم مستوي أو معلم فضائي .
- **منحى:** هو مستقيم يحمل الشعاع $\overrightarrow{\ }$.
- **نقطة تأثير:** نقطة بداية الشعاع ،و هي نوعان مقيدة و حرة حسب طبيعة الشعاع.

15 – 2) تعريفات أساسية:

1-تساوي الأشعة: $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعين متساويان ينتج من هذا تساوي في الطويلة و الاتجاه



2- الجداء مقدار سلمي في شعاع: نعتبر m عدد حقيقي (سلمي) ،المقدار $m\vec{A}$ يسمى جداء المقدار السلمي m في الشعاع $\vec{A}$ ، وهو مقدار شعاعي له الخواص التالية:

. **الطويلة:** $m\left\|\overrightarrow{\ }\right\|$ و اختصارا نرمز لها mA .

. **الاتجاه:** إذا كان $m > 0$ اتجاه الشعاع $\overrightarrow{\ }$ ، إذا كان $m < 0$ عكس اتجاه الشعاع $\vec{A}$.

. **المنحى:** هو نفسه منحى الشعاع $\overrightarrow{\ }$.

. **نقطة التأثير:** و هي نفسها نقطة بداية الشعاع $\overrightarrow{\ }$.

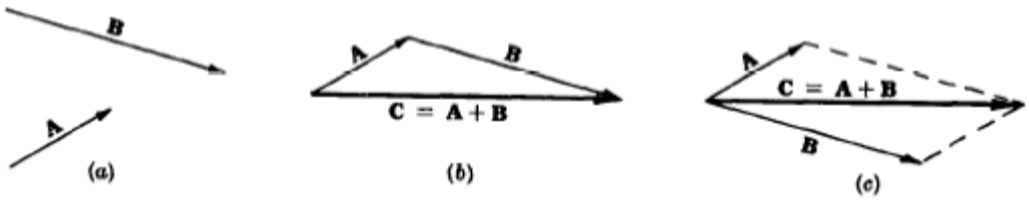
3-مجموع شعاعين : $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعين ، نرمز لمجموعهما بـ : $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

عملية الجمع بيانيا تتم حسب الخطوات التالية و هي ملخصة في الشكل التالي:

الخطوة ( ) : رسم الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

الخطوة ( ) : سحب بداية الشعاع $\vec{B}$ إلى نهاية الشعاع $\vec{A}$.

الخطوة ( ) : رسم المحصلة $\vec{C}$ من بداية الشعاع $\vec{A}$ إلى نهاية الشعاع $\vec{B}$.

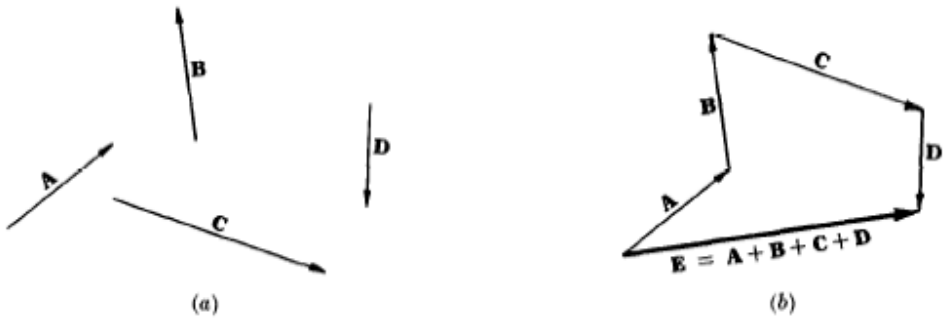


و بنفس الطريقة يتم جمع مجموعة من الأشعة باستخدام نفس الخطوات مثنى مثنى أو الجمع المباشر في ثلاث خطوات حسب الشكل التالي :

الخطوة ( ) : رسم الأشعة في معلم واحد .

الخطوة ( ) : سحب بداية الشعاع الأول إلى نهاية الشعاع الثاني ، ونكرر العملية مع بقية الأشعة إلى غاية الوصول إلى أخر شعاع .

الخطوة ( ) : رسم المحصلة $\vec{C}$ من بداية الشعاع الأول إلى نهاية الشعاع الأخير.



ملاحظة : الطرح هو عملية جمع حيث نرمز : $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ و $-\vec{B}$ يعاكس $\vec{B}$ في الاتجاه.

4-شعاع الوحدة لشعاع: هي وحدة طويلة الشعاع ، **مثلا** : الشعاع $\vec{A}$ له شعاع وحدة يعرف بالعلاقة التالية

:

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{A}$$

5-القوانين الجبرية للشعاع :

. الجمع تبديلي في مجموعة الأشعة:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

. الجمع تجميعي في مجموعة الأشعة:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

. جداء المقدار سلمي بشعاع تجميعي:

$$m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$$

. جمع مقدارين سلميين توزيعي على الجداء:

$$(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$$

. جمع الأشعة توزيعي على جمع مقدارين سلميين:

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$$

6-مركبات الشعاع : ليكن الشعاع $\vec{A}$ معرف في معلم فضاء مزود بمبدأ O و أشعة الوحدة لنظام الإحداثيات المستطيلة $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ للمحاور الأساسية $X'OX, Y'OY, Z'OZ$ على الترتيب .نكتب الشعاع بشكل جديد:

$$\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$$

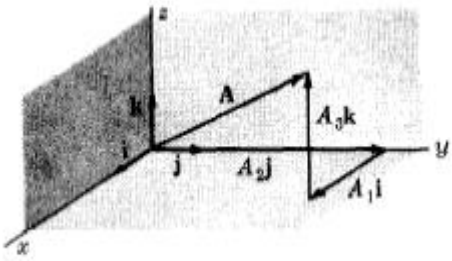
و نستطيع الترميز للمركبات السلمية كالتالي:

$$A_1 \equiv A_x \text{ و } A_2 \equiv A_y \text{ و } A_3 \equiv A_z.$$

و نسمي المركبات الشعاعية كل من الأشعة التالية و حسب الشكل التالي :

$$(\vec{A})_x = A_1\vec{\imath} \quad ; \quad (\vec{A})_y = A_2\vec{\jmath} \quad ; \quad (\vec{A})_z = A_3\vec{k}$$

fb/mehda abderrahmane



7-الجداء السلمي : و الناتج مقدار سلمي .

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

حيث θ الزاوية بين الشعاعين $\longrightarrow$ و $\longrightarrow$. وله الخواص التالية:

. **الجداء السلمي تبديلي** : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

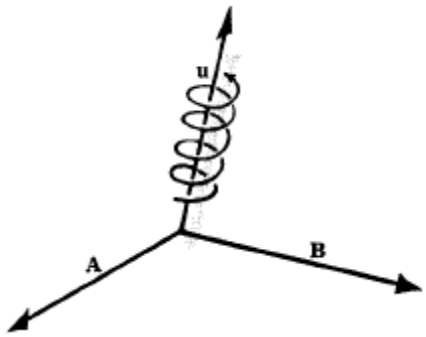
. **الجداء السلمي توزيعي على الجمع**: $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

. **التعبير عن قيمة الجداء السلمي بالمركبات السلمية للأشعة:**

$$\vec{A} = (A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k})$$
$$\vec{B} = (B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} + B_3\vec{k})$$
$$\vec{A}.\vec{B} = (A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}).(B_1\vec{\imath} + B_2\vec{\jmath} + B_3\vec{k}) = A_1\overrightarrow{B_1} + A_2B_2 + A_3B_3$$

8-الجداء الشعاعي : و الناتج مقدار شعاعي .

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$



حيث θ الزاوية بين الشعاعين $\longrightarrow$ و $\longrightarrow$. وله الخواص التالية:

شعاع الوحدة للجداء عمودي على المستوي المشكل من الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و اتجاهه يحدد بقاعدة اليد اليمنى $(right - handed\ system)$ ، أو جهة دوران البرغي .

. **التعبير عن قيمة الجداء الشعاعي بالمركبات السلمية للأشعة:**

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_1\vec{\imath}+A_2\vec{\jmath}+A_3\vec{k}\right)\times\left(B_1\vec{\imath}+B_2\vec{\jmath}+B_3\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_2B_3-A_3B_2)\vec{\imath}+(A_3B_1-A_1B_3)\vec{\jmath}+(A_1B_2-A_2B_1)\vec{k}$$

9-علاقات عامة للجداء السلمي و الشعاعي :

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=A_1B_2C_3+A_2B_3C_1+A_3B_1C_2-A_1B_3C_2-A_2B_1C_3-A_3B_2C_1$$

$\left|\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right|$ حجم متوازي المستطيلات له الأحرف : $\vec{A}$ $\vec{B}$ $\vec{C}$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right)-\vec{A}\left(\vec{B}.\vec{C}\right)$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(\vec{A}.\vec{C}\right)\left(\vec{B}.\vec{D}\right)-\left(\vec{A}.\vec{D}\right)\left(\vec{B}.\vec{C}\right)$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\vec{C}\{\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{D}\right)\}-\vec{D}\{\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\}$$

$$=\vec{B}\{\vec{A}.\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\}-\vec{A}\{\vec{B}.\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\}$$

10- اشتقاق الأشعة :

مشتق الدالة الشعاعية $\vec{A}(u)=A_1(u)\vec{\imath}+A_2(u)\vec{\jmath}+A_3(u)\vec{k}$ بالنسبة للمتغير السلمي u :

$$\frac{d\vec{A}(u)}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{A}(u+\Delta u)-\vec{A}(u)}{\Delta u}=\frac{dA_1}{du}\vec{\imath}+\frac{dA_2}{du}\vec{\jmath}+\frac{dA_3}{du}\vec{k}$$

وبنفس الطريقة نعرف المشتقات الجزئية للمتغيرات x,y,z :

مثلا بالنسبة للمتغير x :

$$\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\right)_{y,z}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\vec{A}(x+\Delta x)-\vec{A}(x)}{\Delta x}\right)_{y,z}=\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{\imath}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)_{y,z}\vec{k}$$

11- علاقات خاصة باشتقاق الأشعة :

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B}$$

fb/mehda abderrahmane

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}$$

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right)=\frac{d\vec{A}}{du}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)+\vec{A}.\left(\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C}\right)+\vec{A}.\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du}\right)$$

$$\vec{A}.\frac{d}{du}\left(\vec{A}\right)=A\frac{dA}{du}$$

$$\vec{A}.\frac{d}{du}\left(\vec{A}\right)=0 \qquad \Rightarrow \quad \|\vec{A}\|=0$$

12– المؤثر دالتا: و يعرف المؤثر (الشعاع) دالتا ($operator$)

$$\vec{\nabla}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

13– التدرج : ($gradiant$)

$$\vec{\nabla}=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

16– علاقات في حساب الموترات :

– **الموتر**($Tenseur$): مشتق من كلمة " توتر–$tension$" ويستعمل في الحسابات الفيزيائية.

ليكن $B=(\vec{e_i})_{i=1,2,3}$ أساس متعامد متجانس لنظام إحداثيات مستطيلة $\mathbb{R}^3$. وليكن الشعاع $\vec{u}=\sum u_i\vec{e_i}$ أو نعبر عليه بالدليل المتكرر (ترميز أينشتاين) $\vec{u}=u_i\vec{e_i}$ (مثلا سرعة نقطة مادية) ، ليكن f مقدار سلمي (مثلا ضغط مائع).

– يعتبر الشعاع $\vec{u}$ موتر (تنسور) من الدرجة 1.

– الموتر من الدرجة 2 هو مصفوفة مربعة من الدرجة 3 عدد عناصرها 9 ، لتكن هذه المصفوفة

$$\bar{\bar{A}}=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1,2,3}$$

– **الجداء التنسوري لمصفوفة و شعاع** (بهذا الترتيب مصفوفة ثم شعاع) يعطينا شعاع:

و هو شعاع : $$\vec{v}=\bar{\bar{A}}.\vec{u}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{33} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\left(\sum_{j=1}^{3}a_{ij}u_j\right)\vec{e_i}$$

و هو شعاع : $$\vec{v}=\bar{\bar{A}}.\vec{u}=a_{ij}u_j=\begin{pmatrix}a_{11}u_1+a_{12}u_2+a_{13}u_3\\ a_{21}u_1+a_{22}u_2+a_{23}u_3\\ a_{31}u_1+a_{32}u_2+a_{33}u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{3}(a_{1j}u_j)\\ \sum_{j=1}^{3}(a_{2j}u_j)\\ \sum_{j=1}^{3}(a_{3j}u_j)\end{pmatrix}$$

fb/medda abderahmane

– **الانكماش المضاعف** $(Double\ contraction)$:هو مجموع مجموع جداء مثنى مثنى لعناصر مصفوفتين ، ويسمى انكماش نظرا لوجود نقصان في رتبة الجداء إلى المقدار السلمي، رغم أن هذا الجداء ناتج من جداء مصفوفتين من الدرجة 2 (أي موتر) ، فهناك انكماش من موتر إلى سلمي ذو الدرجة 0 (وكأن هناك عبورا على الرتبة 1 – رتبة الشعاع–).

و هو مقدار سلمي : $\bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} = a_{ij}b_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}\right)$

– **جداء مصفوفتين** (هو عملية داخلية في مجموعة المصفوفات) ويسمى الجداء التنسوري بين مصفوفتين : عملية غير تبديلية ، هذا الجداء يعطي مصفوفة كما يلي :

و هو مصفوفة :
$$\bar{\bar{A}} \otimes \bar{\bar{B}} = \left(a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k2} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \end{bmatrix}$$

– **الجداء التنسوري لشعاعين** (هو عملية غير داخلية في مجموعة الأشعة) و هو عملية غير تبديلية ويعطي مصفوفة

مصفوفة :
$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \left(u_{ik}v_{kj}\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 \end{bmatrix}$$

– **المؤثرات** :

الإحداثيات المستطيلة :ليكن الشعاع $\vec{A} = u\vec{e_x} + v\vec{e_y} + w\vec{e_z}$ والمقدار السلمي f

. **التدرج** $(grat)$:

و هو شعاع : $\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e_i} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e_i} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$

و هو مصفوفة :
$$\overline{\overline{grad}}\vec{A} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{grad}u \\ \overrightarrow{grad}v \\ \overrightarrow{grad}w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

. **التفرق** $(Divere)$:

fb/mehdaabderrahmane

و هو مقدار سلمي : $div\vec{A} = tr\left(\overline{\overline{grad}}\vec{A}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

و هو شعاع : $\overrightarrow{div}\bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} div\overrightarrow{a_x} \\ div\overrightarrow{a_y} \\ div\overrightarrow{a_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial a_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial a_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_i}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,2,3}$

. **لابلاسيان** $(laplacien)$:

و هو مقدار سلمي : $\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

و هو مقدار شعاعي : $\vec{\Delta}\vec{A} = \overrightarrow{div}\left(\overline{\overline{grad}}\vec{A}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\right)_{i=1,2,3}$

. **الدوران** $(Rotatio)$: وهو عملية داخلية في مجموعة الأشعة

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

. **الهرميتي المضاعف** $(Biharmonic)$: وهو عملية غير داخلية في مجموعة الأشعة

$$\nabla^4 f = \nabla^2\left(\nabla^2 f\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2}$$

ملاحظة عامة: التدرج يرفع الرتبة ، التفرق ينقص الرتبة ، لابلاس يبقي على الرتبة ، الدوران لا يغير رتبة الشعاع.

– علاقات في الحساب مرتبطة بالمؤثر $\vec{\nabla}$:

$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$

$\vec{\nabla}.(f+g) = \vec{\nabla}.f + \vec{\nabla}.g$

$\vec{\nabla} \times (f+g) = \vec{\nabla} \times f + \vec{\nabla} \times g$

$\vec{\nabla}.\left(f\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right).\vec{A} + f\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$

$\vec{\nabla}.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - \vec{A}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$

fb/michela abderrahmane

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla}.\vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ دوران تدرج معدوم

$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ تفرق دوران معدوم

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

1- تكامل دالة شعاعية :

إذا كان $\vec{A}(u) = \frac{d}{du}\vec{B}(u)$ و منه يكون التكامل غير المحدود الدالة الشعاعية $\vec{A}(u)$:

$$\int \vec{A}(u)du = \vec{B}(u) + \vec{c} \qquad \vec{c} \text{ شعاع ثابت}$$

و التكامل المحدود الدالة الشعاعية $\vec{A}(u)$ من $u = a$ إلى $u = b$:

$$\int_a^b \vec{A}(u)du = \vec{B}(b) - \vec{B}(a) \qquad \vec{c} \text{ شعاع ثابت}$$

2- علاقات في التكاملات لها علاقة بالأشعة و المؤثرات :

نعتبر الدالة السلمية $f(x_1, x_2, x_3)$ والدالة الشعاعية $A = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$

بحيث : x_1, x_2, x_3 المتغيرات الثلاثة في الفضاء، و أشعة الوحدة لأساس المعلم هي: $\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}, \vec{k}$

3- علاقة التفرق (علاقة أوستروغرادوسكي):

هذه العلاقة تسمح بتحويل التكامل على حجم إلى تكامل على سطح أو العكس: S السطح المغلق على الحيز D ، $\vec{A}$ شعاع معرف في الحيز D وعلى السطح S ، $\vec{n}$ شعاع وحدة ناظم على dS وموجه إلى الخارج . العلاقة تعطى بما يلي:

$$\iiint_D div(\vec{A})d\varpi = \oiint_S \vec{A}.\vec{n}\, dS = \oiint_S A_n dS$$

fb/ mehda abderrahmane

تعريف : تدفق شعاع خارج من سطح مغلق يساوي تكامل تفرق هذا الشعاع على حجم الحيز المغلق بالسطح. وتكتب هذه العلاقة بشكل آخر:

$$\iiint_D \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) d\varpi = \oiint_S \left(A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z\right) dS$$

$$\iiint_D \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\varpi = \oiint_S A_i n_i dS$$

- **علاقة التدرج (علاقة چوس):**

هذه العلاقة تسمح بتحويل التكامل على حجم إلى تكامل على سطح أو العكس:

$$\iiint_D \overrightarrow{grad}(f) d\varpi = \oiint_S f(x)\vec{n} dS$$

- **علاقة الدوران :**

هذه العلاقة تسمح بتحويل التكامل على حجم إلى تكامل على سطح أو العكس:

$$\iiint_D \overrightarrow{rot}(\vec{A}) d\varpi = \oiint_S \vec{n} \times \vec{A} dS$$

- **علاقة ستوكس:**

هذه العلاقة تسمح بتحويل التكامل على سطح إلى تكامل على منحني أو العكس:

$$\oiint_S \overrightarrow{rot}(\vec{A}).\vec{n}\, dS = \oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

تعريف : تجوال شعاع $\vec{A}$ على المنحني C يساوي تدفق دوران هذا الشعاع عبر السطح S المغلق بالمنحني.

fb/ mehda abderrahmane

- نظرية غرين:

تسمح هذه العلاقة بتحويل التكامل خطي في الاتجاه المباشر على منحني مغلق إلى تكامل سطحي على السطح S المغلق بالمنحني c .

ملاحظة: نظرية چرين حالة خاصة من نظرية ستوكس ، حيث S سطح مستوي مغلق.

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \oiint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) dxdy$$

- مساواة غرين الأولى:

$$\oiiint_D (\boldsymbol{\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \nabla \psi}) \boldsymbol{d\varpi} = \oiint_S (\boldsymbol{\varphi \nabla \psi}) \boldsymbol{dS}$$

- مساواة غرين الثانية:

$$\oiiint_D (\boldsymbol{\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi}) \boldsymbol{d\varpi} = \oiint_S (\boldsymbol{\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi}) \boldsymbol{dS}$$

- المشتق الخاص:

المشتق الخاص للدالة السلمية f المتحركة مع الموضع M حيث $\vec{V}$ سرعة الجسيم ذو الموضع M:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V}.\overrightarrow{grad} f$$

- مشتق تكامل حجمي تابع للحيز $\boldsymbol{D}$:

$$K = \oiiint_D f(M,t) d\varpi$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \oiiint_D \frac{\partial f}{\partial t} d\varpi + \oiiint_D div(f\vec{V})\, d\varpi = \oiiint_D \frac{\partial f}{\partial t} d\varpi + \oiint_S f\, \vec{V}.\vec{n}\, dS$$

fb/mehla abderrahmane

- الأشكال الثلاثة للمشتق الزمني :

لتكن دالة $f(M,t)$ بالنسبة للفضاء والزمن لها علاقة بالسريان ، ولدراسة تغيرات الدالة f بالنسبة للزمن نجد ثلاث أشكال أساسية من أجل المشتق الزمني ، ومن أجل تحديد هذه الأفكار نعتبر مثلا مقياس درجة الحرارة θ لماء نهر ، وفي الواقع درجة الحرارة تتعلق بالموضع وبالزمن $\theta(M,t)$ وهي غير مستمرة .

ومن أجل تحديد درجة الحرارة للماء في نقطة من النهر على السطح الحر لهذا النهر . نضع مسبار لقياس درجة الحرارة يسجل درجة الحرارة اللحظية ، ونعتبر هذا المسبار يتحرك بسرعة $\vec{W}$ ويوجد ثلاث حالات لهذه السرعة :

الحالة الأولى : المسبار لا يتحرك مع النقطة M ومنه تغير درجة الحرارة يكون مع الزمن فقط أي :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

الحالة الثانية : المسبار يتحرك بسرعة $\vec{W}$ كيفية ومنه تغير درجة الحرارة θ يكون مع الموضع و t أي أن $\theta = \theta(M,t)$ و المشتق الزمني يكون :

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{dz}{dt} +$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{W}\overrightarrow{grad}\theta$$

الحالة الثالثة : المسبار يتحرك بسرعة $\vec{V}$ مساوية لحركة الجسيمات التي في تماس معه والمعادلة تكتب :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \vec{W}\,\overrightarrow{grad}\theta$$

وقد سميناها في ما سبق المشتق الخاص أو المشتق التابع للحركة.

- تعميم الاشتقاق التابع للزمن على دالة K :

بحيث هذه الدالة هي تكامل لدالة f حسب العبارة التالية :

$$K = \oiiint_D f(M,t)\,d\varpi$$

و هو تكامل حجمي على الحيز D.

الحالة الأولى المسبار ثابت :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\oiiint_D f\,d\varpi = \oiiint_D \frac{\partial f}{\partial t}\,d\varpi$$

fb/mehla abderahmane

الحالة الثانية المسبار يتحرك بسرعة $\vec{W}$:

$$\frac{\delta K}{\delta t} = \frac{\partial K}{\partial t} + \vec{W}\overrightarrow{grad}K$$

$$\frac{\delta K}{\delta t} = \oiiint_{D} \frac{\partial f}{\partial t} d\varpi + \oiint_{S} f.\vec{W}.\vec{n}.dS$$

الحالة الثالثة المسبار يتحرك بسرعة $\vec{V}$ مع الجسيمات :

$$\frac{dK}{dt} = \oiiint_{D_m} \frac{\partial f}{\partial t} d\varpi + \oiint_{S_m} f.\vec{V}.\vec{n}.dS$$

حيث m هي حيز متحرك من الوسط المادي محدود بالسطح S_m

fb/mehda abderrahmane