

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số
b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-2) - 2$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2; -2), B, D$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến tại B và D với đồ thị (C) bằng 27.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình : $\log_3(x^2 - 9) = \log_3(x+3)^2 + \frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}}(x-5)^2$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính tích phân : $I = \int_0^1 \frac{5x - 3\ln(x+2)}{(x+1)^2} dx$.

Câu 4 (1,0 điểm).

- a) Tính môđun của số phức $z+i$, biết $(z+i)(\bar{z}+i) = 2iz$ (i là đơn vị ảo)
b) Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là “Tốt” nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi “Tốt”.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , $AB = 4$, $AD = 4\sqrt{3}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng 6, gọi M là trung điểm của OC . Tính thể tích khối chóp $S.ABMD$ và diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOCD$.

Câu 6 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+1}{1}$ và điểm $M(2; -1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $K(1; 0; 0)$, song song với đường thẳng d đồng thời cách điểm M một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(5; 5)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x + y - 8 = 0$. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $M(7; 3)$, $N(4; 2)$. Tính diện tích tam giác ABC .

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{2x+3y-7} = 2x+7 \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn : $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Cảm ơn thầy Nguyễn Duy Liên lientoancvp@vinhphuc.edu.vn đã chia sẻ đến www.laisac.page.tl

Câu	Đáp án	Điểm																				
1 (2,0 điểm)	a.(1,0 điểm). $y = x^3 - 3x^2 + 2$ Khảo sát và vẽ đồ thị																					
	♥ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ ♥ Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$. + Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$; + Đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. - Cực trị: + Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y_{CT} = y(2) = -2$; + Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{CD} = y(0) = 2$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0.25																				
	- Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'		+	0	-	0	+	y			2		-2		$+\infty$	0.25
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$																		
y'		+	0	-	0	+																
y			2		-2		$+\infty$															
	♥ Đồ thị: 	0.25																				
	b.(1,0 điểm). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d : y = m(x - 2) - 2$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2; -2), B, D$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến tại B và D với đồ thị (C) bằng 27.																					
	Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là $x^3 - 3x^2 + 2 = m(x - 2) - 2$	0.25																				

	$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-m-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ g(x)=x^2-x-m-2=0(1) \end{cases}$	
	d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A(2;-2), B, D$ khi chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9+4m>0 \\ g(2)=-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \neq m > -\frac{9}{4} (*)$	0.25
	Với điều kiện $(*)$, gọi x_1, x_2 là các nghiệm của (1) thì $x_1+x_2=1, x_1 \cdot x_2=-m-2$	0.25
	Ta có : $k=y'(x_1) \cdot y'(x_2)=(3x_1^2-6x_1)(3x_2^2-6x_2)=9(m+1)^2-9=27$ $\Leftrightarrow (m+1)^2=4, m=1 \vee m=-3$ đối chiếu với điều kiện $(*)$ chỉ có $m=1$ thỏa mãn ycbt	0.25
2 (1,0 điểm)	Giải phương trình : $\log_3(x^2-9)=\log_3(x+3)^2+\frac{1}{4}\log_{\sqrt{3}}(x-5)^2$	
	♥ Điều kiện: $\begin{cases} x^2-9>0 \\ x+3 \neq 0 \\ (x-5)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \vee x>3 \\ x \neq -3 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, x \neq 5 \\ x<-3 \end{cases} (2)$	0.25
	♥ Khi đó: $(2) \Leftrightarrow \log_3(x^2-9)=\log_3(x+3)^2+\log_3 x-5 $ $\Leftrightarrow \log_3(x^2-9)=\log_3[(x+3) x-5]$ $\Leftrightarrow x^2-9=(x+3)^2 \cdot x-5 \Leftrightarrow x-3=(x+3) x-5 (3)$	0.25
	<ul style="list-style-type: none"> Với $x < -3$ hoặc $3 < x < 5$ $(3) \Leftrightarrow x-3=(x+3)(5-x) \Leftrightarrow x^2-x-18=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{73}}{2} (tm) \\ x=\frac{1+\sqrt{73}}{2} (tm) \end{cases}$	0.25
	<ul style="list-style-type: none"> Với $5 < x$ thì $(3) \Leftrightarrow x-3=(x+3)(x-5) \Leftrightarrow x^2-3x-12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{57}}{2} (t/m) \\ x=\frac{3-\sqrt{57}}{2} (loai) \end{cases}$ <p>Vậy phương trình có ba nghiệm $x=\frac{1 \pm \sqrt{73}}{2}; x=\frac{3+\sqrt{57}}{2}$</p>	0.25
3 (1,0 điểm)	Tích phân : $I = \int_0^1 \frac{5x-3\ln(x+2)}{(x+1)^2} dx.$	
	Ta có: $I = 5 \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx - 3 \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{(x+1)^2} dx = 5I_1 - 3I_2$	0.25
	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \ln x+1 \Big _0^1 + \frac{1}{x+1} \Big _0^1$ $= \ln 2 - \frac{1}{2}$	0.25

	$I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(x+2)}{(x+1)^2} dx \text{ . đặt } \begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+2} dx \\ v = -\left(\frac{1}{x+1} + 1\right) = -\frac{x+2}{x+1} \end{cases}$ $\Rightarrow I_2 = -\frac{x+2}{x+1} \ln(x+2) \Big _0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 + \ln x+1 \Big _0^1 = 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$	0.25
	<p>Vậy $I = 5 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) - 3 \left(3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right) = \frac{9}{2} \ln 3 - 4 \ln 2 - \frac{5}{2}$</p>	0.25
4 (1,0 điểm)	a.(0,5 điểm). Tính môđun của số phức $z+i$, biết $(z+i)(\bar{z}+i) = 2iz$ (i là đơn vị ảo)	
	<p>Đặt $z = a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) ta có: $(z+i)(\bar{z}+i) = 2iz$</p> $\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + i(z + \bar{z}) - 1 = 2iz \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 1 + 2ai = -2b + 2ai$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 = -2b \\ 2a = 2a \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2b + 1 = 2 \Leftrightarrow a^2 + (b+1)^2 = 2$	0.25
	$ z+i = a+(b+1)i = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \sqrt{2}$. Vậy môđun của số phức $z+i$ bằng $\sqrt{2}$	0.25
	b.(0,5 điểm). Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là “Tốt” nếu trong đề thi có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi “Tốt”.	
	<p>♥ Số phần tử của không gian mẫu là $\Omega = C_{30}^5 = 142506$</p> <p>♥ Gọi A là biến cố " đề thi lấy ra là một đề thi “Tốt”</p> <p>Vì trong một đề thi “Tốt” có cả ba câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố A</p> <p>TH1. Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó TH này có $C_{15}^3 C_{10}^1 C_5^1$</p> <p>TH2. Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó TH này có $C_{15}^2 C_{10}^2 C_5^1$</p> <p>TH3. Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó TH này có $C_{15}^2 C_{10}^1 C_5^2$</p> <p>♥ Vậy $\Omega_A = C_{15}^3 C_{10}^1 C_5^1 + C_{15}^2 C_{10}^2 C_5^1 + C_{15}^2 C_{10}^1 C_5^2 = 56875$</p>	0.25
	<p>♥ Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{56875}{142506} = \frac{625}{1566}$.</p> <p>(TH : Trường hợp)</p>	0.25
5 (1,0 điểm)	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , $AB = 4$, $AD = 4\sqrt{3}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng 6, gọi M là trung điểm của OC . Tính thể tích khối chóp $S.ABMD$ và diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOCD$.	
	<p>Ta có $SA = SB = SC = SD = 6 \Rightarrow SO \perp (ABCD)$</p> $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC = \Delta SOD \Rightarrow OA = OB = OC = OD \Rightarrow ABCD \text{ là hình chữ nhật.} \Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$	0.25
	<p>Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8 \Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = 2\sqrt{5}$</p> <p>Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 16\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{15}}{3} \Rightarrow V_{S.ABMD} = \frac{3}{4} V_{S.ABCD} = 8\sqrt{15}$</p>	0.25
	<p>Gọi G là trọng tâm ΔOCD, vì ΔOCD đều nên G cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔOCD. Dựng đường thẳng d đi qua G và song song với SO</p> <p>$\Rightarrow d \perp (ABCD)$ nên d là trục đường tròn (OCD). Trong mặt phẳng (SOG) dựng</p>	0.25

	đường thẳng trung trực của SO , cắt d tại K , cắt SO tại I ta có OI là trung trực của $SO \Rightarrow KO = KS$, do $KO = KC = KD \Rightarrow K$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOCD$.	
	<p>Ta có $GO = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$; $R = KO = \sqrt{OI^2 + OG^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{93}}{3}$. Do đó</p> <p>diện tích mặt cầu $S_{cầu} = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{93}}{3}\right)^2 = \frac{124\pi}{3}$.</p>	0.25
6 (1,0 điểm)	<p>Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+1}{1}$ và điểm $M(2; -1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $K(1; 0; 0)$, song song với đường thẳng d đồng thời cách điểm M một khoảng bằng $\sqrt{3}$.</p>	
	<p>d có vtcp $\vec{u} = (2; -3; 1)$, qua $H(-2; 4; -1)$, (P) có vtp $\vec{n} = (A; B; C)$, $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$</p> <p>$d \parallel (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ H(-2; 4; -1) \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A - 3B + C = 0 \\ -3A + 4B - C \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -2A + 3B \\ C \neq 3A - 4B \end{cases} (*)$</p>	0.25
	<p>$(P): \begin{cases} \text{qua } K(1; 0; 0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = (A; B; -2A + 3B) \end{cases} \Rightarrow (P): Ax + By + (3B - 2A)z - A = 0$</p> <p>$d(M, (P)) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{ -5A + 8B }{\sqrt{A^2 + B^2 + (3B - 2A)^2}} = \sqrt{3}$</p>	0.25
	<p>$\Leftrightarrow (-5A + 8B)^2 = 3(5A^2 - 12AB + 10B^2) \Leftrightarrow 5A^2 - 22AB + 17B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ 5A = 17B \end{cases}$</p> <ul style="list-style-type: none"> Với $A = B \Rightarrow C = B$ không thỏa mãn $(*)$ Với $5A = 17B \Rightarrow$ chọn $A = 17$ ta có $B = 5 \Rightarrow C = -19$ thỏa mãn $(*)$ 	0.25
	Suy ra phương trình mặt phẳng $(P): 17x + 5y - 19z - 17 = 0$	0.25
7 (1,0 điểm)	<p>Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trục tâm $H(5; 5)$, phương trình đường thẳng chứa cạnh BC là $x + y - 8 = 0$. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua hai điểm $M(7; 3)$, $N(4; 2)$. Tính diện tích tam giác ABC.</p>	
	<p>Gọi H_1 đối xứng với H qua $BC \Rightarrow pt HH_1: x - y = 0 \Rightarrow \{I\} = HH_1 \cap BC$ $\Rightarrow I(4; 4) \Rightarrow H_1(3; 3)$. Ta chứng minh được điểm H_1 thuộc (ABC)</p>	0.25
	<p>$(ABC): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, (a^2 + b^2 - c > 0)$</p> <p>Do $\begin{cases} M \in (ABC) \\ N \in (ABC) \\ H_1 \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7^2 + 3^2 - 14a - 6b + c = 0 \\ 4^2 + 2^2 - 8a - 4b + c = 0 \\ 3^2 + 3^2 - 6a - 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = 36 \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow (ABC): x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0$</p>	0.25
	<p>$\{A\} = HH_1 \cap (ABC) \Rightarrow A(6; 6)$, do $A \neq H_1$.</p> <p>$\{B, C\} = BC \cap (ABC) \Rightarrow$ tọa độ B, C là nghiệm hpt $\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y + 36 = 0 \end{cases}$</p>	0.25

	$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ x=6 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}, d(A, BC) = \frac{ 6+6-8 }{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$	
	Suy ra diện tích ΔABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(A, BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$ (đvdt)	0.25
8 (1,0 điểm)	Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} & (1) \\ 3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{2x+3y-7} = 2x+7 & (2) \end{cases}$	
	Đ/K $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \leq y \leq 6 \\ 2x+3y-7 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$. Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{y-1} - \sqrt{x} + (y-1)^2 - x^2 + y(y-x-1) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow (y-x-1) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+x} + 2y+x-1 \right)}_{>0, x \geq 0 \& 6 \geq y \geq 1} = 0 \Rightarrow y-x-1=0 \Leftrightarrow x=y-1 \quad (3)$	0.25
	Thế (3) vào (2) ta được pt $3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{5y-9} = 2y+5$, (4) đ/k $\frac{9}{5} \leq y \leq 6$ Giải (4) $\Leftrightarrow (8-y) - 3\sqrt{6-y} + 3(y-1-\sqrt{5y-9}) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{y^2-7y+10}{(8-y)+3\sqrt{6-y}} + 3 \cdot \frac{y^2-7y+10}{y-1+\sqrt{5y-9}} = 0$ $\Leftrightarrow (y^2-7y+10) \underbrace{\left(\frac{1}{8-y+3\sqrt{6-y}} + \frac{3}{y-1+\sqrt{5y-9}} \right)}_{>0, \forall \frac{9}{5} \leq y \leq 6} = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow y^2-7y+10=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \xrightarrow{(4)} x=1 & (tm \quad *) \\ y=5 \xrightarrow{(4)} x=4 & (tm \quad *) \end{cases}$ Vậy hpt có hai nghiệm $(x; y) = (1; 2), (x; y) = (4; 5)$	0.25
9 (1,0 điểm)	Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn : $9(a^4+b^4+c^4) - 25(a^2+b^2+c^2) + 48 = 0$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$	
	Cách 1 gt $\Leftrightarrow 25(a^2+b^2+c^2) + 48 = 9(a^4+b^4+c^4)$ kết hợp với đẳng thức $a^4+b^4+c^4 \geq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$, từ đó suy ra: $25(a^2+b^2+c^2) + 48 \geq 3(a^2+b^2+c^2)^2 \Leftrightarrow 3 \leq a^2+b^2+c^2 \leq \frac{16}{3}$	0.25
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\frac{a^2}{b+2c} + \frac{(b+2c)a^2}{9} \geq \frac{2a^2}{3}$ $\frac{b^2}{c+2a} + \frac{(c+2a)b^2}{9} \geq \frac{2b^2}{3}, \frac{c^2}{a+2b} + \frac{(a+2b)c^2}{9} \geq \frac{2c^2}{3}$.	0.25

	<p>Khi đó $P \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}[a^2(b+2c) + b^2(c+2a) + c^2(a+2b)]$</p>	
	<p>Mà $a^2c + c^2b + b^2a \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3} = a^3 + b^3 + c^3$</p> <p>Suy ra : $a^2(b+2c) + b^2(c+2a) + c^2(a+2b) \leq a^3 + a^2b + a^2c + b^3 + b^2c + b^2a + c^3 + c^2b + c^2a = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq (a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$</p> <p>Từ đó $P \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$</p>	0.25
	<p>Đặt $t = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \Rightarrow 3 \leq t \leq 4$.</p> <p>Cho nên $P \geq -\frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2 = f(t), t \in [3; 4]$</p> <p>Xét hàm số $f(t) = -\frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2, \forall t \in [3; 4] \Rightarrow f'(t) = -\frac{t^2}{9} + \frac{4t}{9} = \frac{t(4-t)}{9} \geq 0$</p> <p>$\forall t \in [3; 4] \Rightarrow f(t)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[3; 4]$</p> <p>$\Rightarrow \min_{t \in [3; 4]} f(t) = f(3) = 2 \cdot \frac{3^2}{9} - \frac{3^3}{27} = 1 \Rightarrow \min P = \min_{t \in [3; 4]} f(t) = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$</p>	0.25
	<p>Cách 2: Ta có $14x + 2 \geq 25x^2 - 9x^4$ (*), $\forall x > 0, "=" \Leftrightarrow x = 1$ thật vậy</p> <p>(*) $\Leftrightarrow 9x^4 - 25x^2 + 14x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(9x^2 + 18x + 2) \geq 0$ luôn đúng. Vậy</p> $\begin{cases} 14a + 2 \geq 25a^2 - 9a^4 \\ 14b + 2 \geq 25b^2 - 9b^4 \\ 14c + 2 \geq 25c^2 - 9c^4 \end{cases} \Rightarrow 14(a+b+c) + 6 \geq 25(a^2 + b^2 + c^2) - 9(a^4 + b^4 + c^4) = 48$ <p>$\Rightarrow a + b + c \geq 3$, dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c = 1$</p> <p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schawrz ta được</p> $P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{3} \geq 1$ <p>dấu bằng $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 $\Leftrightarrow a = b = c = 1$</p>	

Lưu ý khi chấm bài:

- Đáp án chỉ trình bày một cách giải bao gồm các ý bắt buộc phải có trong bài làm của học sinh. Khi chấm nếu học sinh bỏ qua bước nào thì không cho điểm bước đó.
- Nếu học sinh giải cách khác, giám khảo căn cứ các ý trong đáp án để cho điểm.
- Trong bài làm, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các phần sau có sử dụng kết quả sai đó không được điểm.
- Học sinh được sử dụng kết quả phần trước để làm phần sau.
- Trong lời giải câu 5 nếu học sinh không vẽ hình thì không cho điểm.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

Cảm ơn thầy Nguyễn Duy Liên lientoancvp@vinhphuc.edu.vn đã chia sẻ đến www.laisac.page.tl