Université Mohamed Kheider Biskra **14/01/2023**

Faculté des sciences et de la technologie **Semestre : I**

Département de Génie Electrique **Module : Math 3**

CORRECTION EMD

Exercice01 (1pts +1pts + (1+1)pts)

Voir cours

Exercice02 (5pts + 3pts)

a- La solution générale est : $y_G = y_h + y_p$

(EH) : $y_h'' + 2y_h' + y_h = 0$ 0.5pts

$\Rightarrow$ (ES) : $r^2 + 2r + 1 = 0$ 0.25pts

$\Rightarrow r = -1$ 0.25pts

Alors $y_h = K_1 x + K_2 e^{-x}$, K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}$. 1pts

-1 racine double de (ES) alors $y_p = Ax^2 e^{-x}$ 1pts

$\Rightarrow y_p'' + 2y_p' + y_p = e^{-x}$ 0.5pts

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$ 0.5pts

Donc la solution générale est : $y_G = K_1 x + K_2 e^{-x} + \frac{x^2}{2} e^{-x}$, K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}$. 0.5pts

D'autre part : $\begin{cases} y_G(0) & = & 1 \\ y_G'(0) & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2 & = & 1 \\ K_1 & = & K_2 = 1 \end{cases}$ 0.5pts

Alors $y = x + e^{-x} + \frac{x^2}{2} e^{-x}$.

b-

$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\cos(y-x) - \sin(x-y) + g(x)$, g fonction arbitraire. 1pts

$\Rightarrow z(x,y) = -\sin(y-x) - \cos(x-y) + yg(x) + h(x)$, g et h sont des fonctions arbitraires. ... 1pts

D'autre part : $\begin{cases} z(x,0) & = & \sin(x) \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,0) & = & -\cos(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x) - \cos(x) + h(x) & = & \sin(x) \\ -\cos(x) - \sin(x) + g(x) = -\cos(x) & = & -\cos(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(x) & = & \cos(x) \\ g(x) & = & \sin(x) \end{cases}$ 1pts

Alors $z(x,y) = -\sin(y-x) - \cos(x-y) + y\sin(x) + \cos(x)$.

Exercice03 ((1.5+1+1.5)pts + 4pts)

1-

- On a $\left|\frac{\cos(x)}{(x+3)^5}\right| \leq \frac{1}{x^5}$ 0.25pts

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}dx$ convergente (intégrales de Riemann $\alpha = 5 > 1$). 0.5pts

$\Rightarrow I_1$ est absolument convergente. 0.25pts

$\Rightarrow I_1$ convergente. 0.5pts

- On a $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1+e^{-x}}{x^2}$ 0.25pts

Puisque $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ divergente (intégrales de Riemann $\alpha = 2 > 1$). 0.5pts

$\Rightarrow I_2$ divergente. 0.25pts

- On a $\left|xe^{-x^2}\sin(x)\right| \leq xe^{-x^2}$ 0.25pts

Puisque $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ (convergente) 0.5pts

$\Rightarrow I_3$ est absolument convergente. 0.25pts

$\Rightarrow I_3$ convergente. 0.5pts

2-

On passe en coordonnées polaires en posant

$$\left.\begin{array}{ccc} x = r\cos(\theta) & \text{et} & y = r\sin(\theta) \\ dxdy & = & rdrd\theta \end{array}\right\} \text{......... 0.5pts}$$

On a : $e \leq x^2 + y^2 \leq e^2 \Rightarrow \sqrt{e} \leq r \leq \sqrt{e^2}$ 0.5pts

$x \geq 0$ et $y \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ 1pts

Alors

$$\begin{aligned}\int\int_A \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e^2}} \frac{2}{r}\ln(r)drd\theta \qquad \text{(2pts)}\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\theta \int_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e^2}} \frac{2}{r}\ln(r)dr \\ &= \theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \times (\ln(r))^2\Big|_{\sqrt{e}}^{\sqrt{e^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$