

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

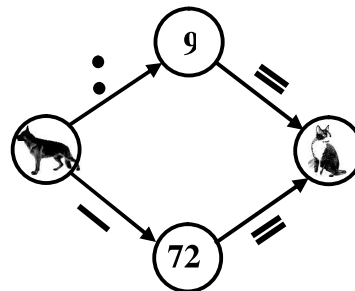
ТЕМА за 3–4 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. В равенствата под кученцето и котенцето е скрито по едно число. Намерете произведението на тези две числа.

- A) 648
- B) 640
- C) 576
- D) 729
- E) 567



2. В състезанието “Европейско Кенгуру” участвали ученици от всички градове на България. Участниците от Пловдив били с 219 повече от участниците от Бургас и с 307 по-малко от участниците от Варна, а участниците от София били с 675 повече от участниците от Бургас. С колко участниците от София са повече от участниците от Варна?

- A) 149
- B) 88
- C) 368
- D) 587
- E) 456

3. Дължината на правоъгълник е равна на 26 см, а широчината е с 67 см по-малка от обиколката му. Обиколката на правоъгълника е равна на:

- A) 93 см
- B) 186 см
- C) 119 см
- D) 134 см
- E) 82 см

4. Четири дървета са подредени в права линия. Разстоянията между съседните дървета са 63 м, 18 м и 54 м. Колко най-малко дървета още трябва да се засадят между дадените дървета (по права линия) така, че разстоянията между всеки две съседни дървета да са равни?

- A) 6
- B) 12
- C) 15
- D) 132
- E) 24

5. Паяк виси на 30 см от тавана в понеделник сутринта. Всеки ден той се спуска 50 см, а през нощта се изкачва 20 см. В кой ден от седмицата паякът ще стъпи на пода, ако таванът е висок 255 см?

- A) петък
- B) събота
- C) неделя
- D) понеделник
- E) вторник

6. Пътнически влак има 8 вагона. На една малка гара във влака се качили трима пътници. По колко различни начина те могат да се настанят във вагоните така, че двама от пътниците да са в един вагон, а третият – в друг?

7. Крали Марко се сражавал с десет четириглави чудовища. На някои от тях той отсякъл две от главите, на други – три, а останалите обезглавил напълно. Три от чудовищата загубили общо четири пъти по-малко глави от останалите седем. Чудовищата, останали с една глава, били повече от тези, които останали с две глави. Колко глави е отсякъл Крали Марко и колко чудовища е обезглавил напълно?

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

ТЕМА за 5-6 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

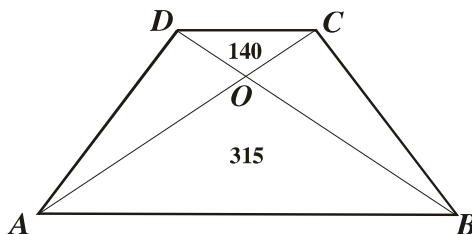
ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Ако $x = \frac{111110}{111111}$, $y = \frac{222221}{222223}$ и $z = \frac{333331}{333334}$, то за числата x , y и z е вярно, че:

- A) $x < y < z$ B) $x < z < y$ C) $z < y < x$ D) $z < x < y$ E) $y < x < z$

2. В трапеца $ABCD$ с основи AB и CD диагоналите AC и BD се пресичат в точка O . Лицата на триъгълниците ABO и CDO са съответно 315 кв. см и 140 кв. см. Лицето на триъгълника BOC , измерено в квадратни сантиметри, е:

- A) 140 B) 147 C) 175 D) 180 E) 210



3. Карлсон написал 6-цифрено число, като използвал всяка от цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6. След него Дребосъчето, започвайки отляво надясно, на мястото на всяка цифра от числото на Карлсон написало броя на цифрите след нея, които са по-малки от нея. Ако полученото от Дребосъчето число е 340210, коя е цифрата на единиците на числото на Карлсон?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

4. Майстор Дръм решил да промени рецептата на вълшебния си коктейл от ябълки, манго и тайнствен концентрат (наследство от баба му). Сокът от ябълки, манго, както и тайнствения концентрат той съхранявал поотделно в еднакви кутии. Преди промяната от една кутия ябълков сок Дръм приготвял 6 коктейла, една кутия сок от манго стигала за 10 коктейла, а 1 кутия тайнствен концентрат – за 15 коктейла. След промяната на рецептата една кутия ябълков сок била достатъчна за 5 коктейла, а една кутия сок от манго – за 12 коктейла. За колко коктейла е достатъчна една кутия тайнствен сок при новата рецепта?

- A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20



5. Правоъгълен паралелепипед има измерения 216 см, 324 см и 360 см. По колко различни начина този паралелепипед може да бъде разрязан на еднакви кубчета с ръб цяло число сантиметри?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

6. Колко са трицифрените числа, в записа на които съседните цифри са различни?

7. В числовия ребус $M \cdot A \cdot T \cdot E + M \cdot A \cdot T \cdot I - K \cdot A = 2009$ нулата не участва и на различните букви отговарят различни цифри, а на еднаквите букви – еднакви цифри, като точката означава умножение. Намерете броя на различните решения на ребуса.

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

ТЕМА за 7-8 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. За $x \neq 0$ и $y \neq 0$ са изпълнени равенствата $x + \frac{1}{y} = 13$ и $y + \frac{1}{x} = 26$. Пресметнете $\frac{x}{y}$.

- A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 4 E) 3

2. Намерете броя на двуцифрените числа със свойството: ако умножим числото с 2, сумата от цифрите му не се променя.

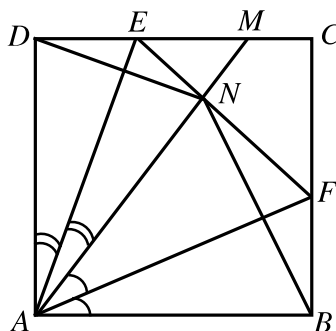
- A) 0 B) 4 C) 9 D) 10 E) 15

3. В езерото „Бизоново око” се влива река. Стадо от 154 бизона може да изпие езерото за един час, а стадо от 26 бизона – за 6 часа. За колко часа може един бизон да изпие цялото езеро, ако всеки от бизоните може за изпие езерото за един и същ брой часове?

- A) 180 B) 186 C) 174 D) 232 E) 256

4. Даден е квадрат $ABCD$. Върху страната BC е взета точка F , а върху страната CD – съответно точки E и M така, че $\angle BAF = \angle MAF$ и $\angle DAE = \angle MAE$. Ако AM пресича EF в точка N , да се намери мярката на $\angle DNB$.

- A) 105° B) 120° C) 135°
D) 150° E) 165°



5. Естествените числа a , b и c са такива, че $3a = 7b^2 = c^3$. Най-малкото естествено число c , за което това е възможно, е:

- A) 7 B) 21 C) 63 D) 84 E) 91

6. На 6 картончета са написани цифрите 1, 1, 2, 2, 3, 3, като на всяко картонче е написана само една цифра. Иван нарежда картончетата и образува различни шестцифрени числа, като не поставя картончета с едни и същи цифри едно до друго. Колко най-много такива шестцифрени числа може да образува Иван?

7. Дадена е наредена четворка положителни числа (a, b, c, d) . От нея се получава втора четворка (ab, bc, cd, da) по следното правило: всяко число се умножава по следващото, а четвъртото – по първото. От втората четворка по същото правило се получава трета четворка и т. н.

а) Възможно ли е по това правило да се получи наредената четворка числа $(48, 64, 256, 576)$, ако числата в първоначалната четворка са цели?

б) Възможно ли е по това правило да се получи наредената четворка числа $(120, 750, 6750, 1080)$, ако числата в първоначалната четворка са цели и взаимно прости?

в) Намерете всички четворки (a, b, c, d) , от които по даденото правило след няколко стъпки се получава отново четворката (a, b, c, d) .

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

ТЕМА за 9-10 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

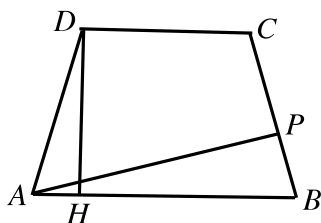
ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Сборът от корените на уравнението $\sqrt{\frac{1}{9} - 2x + 9x^2} = 2 - |x|$ е равен на:

- A) 1 B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) 0 E) -1

2. Ако $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, намерете броя на реалните корени на уравнението $f(f(f(f(x)))) = x$.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) безброй много



3. Нека $ABCD$ е равнобедрен трапец, в който височината DH ($H \in AB$) е равна на голямата основа AB . Точката P лежи върху бедрото BC , като $AP \perp BC$ и $BP:PC = 1:3$. Отношението $AB:CD$ е равно на:

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ E) 3

4. Да се намери числената стойност на многочлена $P(x) = 2x^5 - 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 2$ при

$$x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) -1 C) 0 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$

5. Във върховете на n -ъгълник са написани n различни числа. Ако всяко число е равно на произведението на двете му съседни, то n е равно на:

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

6. Нека $a > 0$ е цяло число и $b = a + [\sqrt{a}]$, където с $[m]$ е означена цялата част на m . С числото b постъпваме по същия начин, т.е. нека $c = b + [\sqrt{b}]$. По-нататък нека $d = c + [\sqrt{c}]$ и продължаваме, докато се получи точен квадрат. Например, ако $a = 17$, то последователните стъпки са 21 ($17 + 4$) и 25 ($21 + 4$), а ако $a = 19$, то последователните стъпки са 23 ($19 + 4$), 27 ($23 + 4$), 32 ($27 + 5$), 37 ($32 + 5$), 43 ($37 + 6$) и 49 ($43 + 6$). Ако $a = 2009$, кой е точният квадрат, който се достига по описания начин?

7. Дължините на страните и на височините на равнобедрен триъгълник са естествени числа. Каква е най-малката възможна стойност на лицето на триъгълника?

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

ТЕМА за 11-12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

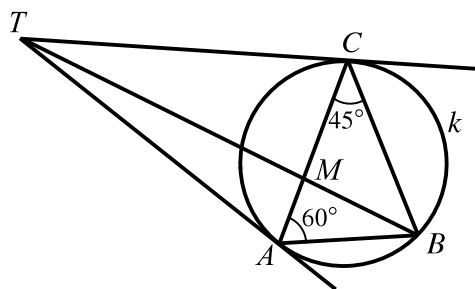
ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Нека $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = p$ и $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = q$, където p и q са различни ненулеви реални числа. Стойността на $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ е:

- A) $\frac{pq}{q-p}$ B) $\frac{pq}{p-q}$ C) $\frac{p-q}{pq}$ D) $\frac{q-p}{pq}$ E) $\frac{p}{q-p}$

2. На чертежа $\triangle ABC$ е вписан в окръжността k и допирателните към k в точките A и C се пресичат в точка T . Нека BT пресича AC в точка M . Ако $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ACB = 45^\circ$, отношението $\frac{AM}{MC}$ е равно на:

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$



3. Дадена е редицата $a_n = n \left(\frac{n+1}{6} \right)^2$, $n = 1, 2, \dots, 100$. Колко от членовете на тази редица са цели числа?

- A) 8 B) 16 C) 24 D) 32 E) друг отговор

4. За всяко реално число z означаваме с $[z]$ най-голямото цяло число, което не надхвърля z .

Броят на решенията на системата
$$\begin{cases} x + [y] = \sqrt{2} \\ y + [x] = \sqrt{5} \end{cases}$$
 е:

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) повече от 3

5. Намерете броя на реалните корени на уравнението $1 - \frac{x^2}{2} = \cos x$.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) безброй много E) четен брой

6. Дадено е уравнението $\cos(8m-3)x = \cos(14m+5)x$, където m е параметър. Намерете положителните стойности на m , при които неотрицателните решения на уравнението, взети в растящ ред, образуват аритметична прогресия.

7. Нека N е най-малкото 2009-цифрено естествено число, което е кратно на 2009. Колко измежду цифрите на N са нули?

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИТЕ

3-4 клас

1. Отг. D).
2. Отг. A).
3. Отг. E).
4. Отг. B).
5. Отг. C).
6. Отг. 168

5-6 клас

1. Отг. B).
2. Отг. E).
3. Отг. B).
4. Отг. E).
5. Отг. D).
6. Отг. 729

7-8 клас

1. Отг. C).
2. Отг. D).
3. Отг. E).
4. Отг. C).
5. Отг. C).
6. Отг. 30

9-10 клас

1. Отг. C).
2. Отг. E).
3. Отг. D).
4. Отг. C).
5. Отг. C).
6. Отг. 73^2

11-12 клас

1. Отг. A).
2. Отг. B).
3. Отг. D).
4. Отг. A).
5. Отг. B).
6. Отг. $m = \frac{3}{8}$, $m = \frac{2}{19}$, $m = \frac{1}{30}$, $m = \frac{7}{5}$ и $m = \frac{11}{2}$

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

6 юни 2009 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧА 7

3-4 клас

7. Нека трите чудовища, които са загубили общо четири пъти по-малко глави от останалите седем, са загубили общо x глави. Тогава броят на главите, които са загубили останалите седем чудовища, е $4x$ и общият брой на отсечените от Крали Марко глави е $5x$. (2 т.)

Тъй като десетте чудовища имат 40 глави и Крали Марко не е обезглавил всички, то броят на отсечените от него глави е 35, 30, 25, 20, 15, 10 или 5. (1 т.)

Трите чудовища, за които стана дума по-горе, са загубили най-малко 6 глави, т.е. $x \geq 6$ и следователно $5x \geq 30$. Следователно броят на отсечените глави е 35 или 30. (1 т.)

Нека отсечените глави са общо 35. Тогава $x = 7$, което се реализира единствено когато две от чудовищата (измежду трите, за които стана дума по-горе) са загубили по 2 глави, а третото – 3 глави. Следователно чудовищата, загубили 2 глави, са най-малко 2. Тези, които са загубили 3 глави, са най-малко 3, защото ако допуснем, че са най-много 2, то общият брой загубени глави е най-много $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 34$, което е по-малко от 35. Заключаваме, че напълно обезглавените чудовища са най-много 5 и отсечените от Крали Марко глави са най-много $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 33$. Отново стигаме до невъзможност. Следователно Крали Марко е отсякъл точно 30 глави. (3 т.)

Ще докажем, че случаят на 30 отсечени глави се реализира. Наистина, сега трите чудовища (за които стана дума по-горе) са загубили общо $30 : 5 = 6$ глави, което е възможно само ако всяко от тях е загубило по 2 глави. Следователно броят на чудовищата, загубили 2 глави, е най-малко 3, а броят на чудовищата, загубили 3 глави, е най-малко 4 (съгласно условието на задачата чудовищата, останали с една глава, били повече от тези, които останали с две глави). В таблицата по-долу са показани всички възможности.

чудовища, загубили 2 глави	чудовища, загубили 3 глави	чудовища, загубили 4 глави	общ брой загубени глави
3	4	3	30
3	5	2	29
3	6	1	28
4	5	1	27

Само първата възможност удовлетворява условието. Следователно Крали Марко е отсякъл общо 30 глави и е обезглавил напълно 3 чудовища. (3 т.)

5-6 клас

7. **Отг. 20.** Произведенията $M \cdot A \cdot T \cdot E$, $M \cdot A \cdot T \cdot I$ и $K \cdot A$ имат общ множител A , което означава, че A е едноцифрен делител на числото 2009. Оттук следва, че $A = 1$ или $A = 7$. Ако $A = 1$, то лявата страна на ребуса ще е по-малка от числото $2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1008$, което пък е по-малко от 2009 и ребусът няма да има решение. Остава $A = 7$. Да запишем ребуса във вида $M \cdot A \cdot T \cdot E + M \cdot A \cdot T \cdot I = K \cdot A + 2009$ и да проверим различните стойности на K . При $K = 1$ ребусът приема вида $M \cdot A \cdot T \cdot (E + I) = 7 \cdot 288$, откъдето $M \cdot T \cdot (E + I) = 288$. Тъй като $288 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, намираме, че $E + I$ е делител на 288, по-малък от 18 (E и I са

различни цифри и следователно $E + I \leq 9 + 8 = 17$). Ако $E + I = 16$, то трябва $M \cdot T = 18$, но това е невъзможно, защото тогава цифрата 9 трябва да се повтаря. Ако $E + I = 12$, то трябва $M \cdot T = 24$. Тогава получаваме $E + I = 3 + 9$ и $M \cdot T = 6 \cdot 4$, откъдето имаме 4 решения на ребуса (защото буквите M и T , както E и I , могат да разменят стойностите си). Следващите възможности, всяка от които дава още по четири нови решения, са: $E + I = 3 + 6$ и $M \cdot T = 8 \cdot 4$, $E + I = 2 + 6$ и $M \cdot T = 9 \cdot 4$, $E + I = 3 + 5$ и $M \cdot T = 9 \cdot 4$, $E + I = 2 + 4$ и $M \cdot T = 8 \cdot 6$. Случаят $E + I = 3 + 1$ и $M \cdot T = 9 \cdot 8$ отпада, защото при него единицата се повтаря. Окончателно получаваме, че при $K = 1$ даденият ребус има 20 решения:

A	K	E	I	M	T
7	1	3	9	4	6
7	1	9	3	4	6
7	1	3	9	6	4
7	1	9	3	6	4
7	1	3	6	4	8
7	1	6	3	4	8
7	1	3	6	8	4
7	1	6	3	8	4
7	1	2	6	4	9
7	1	6	2	4	9
7	1	2	6	9	4
7	1	6	2	9	4
7	1	3	5	4	9
7	1	5	3	4	9
7	1	3	5	9	4
7	1	5	3	9	4
7	1	2	4	6	8
7	1	4	2	6	8
7	1	2	4	8	6
7	1	4	2	8	6

При $K = 2$ имаме $M \cdot T \cdot (E + I) = 289 = 17 \cdot 17$ и ребусът няма решение. Аналогично не съществуват решения при $K = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9 , защото съответните равенства са:

$$\begin{aligned}
 M \cdot T \cdot (E + I) &= 290 = 2 \cdot 5 \cdot 29, & M \cdot T \cdot (E + I) &= 291 = 3 \cdot 97, \\
 M \cdot T \cdot (E + I) &= 292 = 2 \cdot 2 \cdot 73, & M \cdot T \cdot (E + I) &= 293 \text{ (просто)}, \\
 M \cdot T \cdot (E + I) &= 294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \text{ (седмицата е използвана за } A), \\
 M \cdot T \cdot (E + I) &= 295 = 5 \cdot 59, & M \cdot T \cdot (E + I) &= 296 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 37.
 \end{aligned}$$

7-8 клас

7. а) Произведението на числата във всяка четворка е квадрат на произведението на числата в предната четворка. Но произведението 48.64.256.576 не е точен квадрат, защото $64 = 8^2$, $256 = 16^2$ и $576 = 24^2$, а 48 не е точен квадрат. Отговорът е отрицателен.

б) Възможно е да се тръгне от четворката (3,2,1,5) и да се направят четири стъпки. Решението може да се открие с разсъждения „отзад напред” или чрез разлагане на прости множители.

в) Очевидно (1,1,1,1) е решение. Ще докажем, че то е единственото. Други решения в цели числа няма, защото на всяка стъпка числата се увеличават. Ще докажем, че в общия

случай $abcd = 1$. Ако $abcd = x$, то произведението на числата от втората четворка е x^2 , от третата е x^4 , от четвъртата е x^8 и т. н. Ясно е, че при $x \neq 1$ в редицата от произведения няма да има две еднакви числа и следователно всички получени четворки ще бъдат различни, откъдето заключаваме, че $x = 1$. Да разгледаме втората четворка (ab, bc, cd, da) . Тъй като $abcd = 1$, то непосредствено се вижда, че четвъртата четворка е $(b^2c^2, c^2d^2, d^2a^2, a^2b^2)$. По този начин четвъртата четворка се получава от втората чрез повдигане на втора степен и разместване. Аналогично от четвъртата четворка се получава шестата, от шестата – осмата и т.н. Ако не всички числа във втората четворка са равни на 1, то най-голямото от тях е по-голямо от 1. Това число ще се увеличава във всяка следваща четворка и никога не може да стане 1. Заключаваме, че $ab = bc = cd = da = 1$. Следователно всички четворки след втората са $(1, 1, 1, 1)$. И така, единственото решение е $(1, 1, 1, 1)$.

9-10 клас

7. Да отбележим най-напред, че дължината на основата на триъгълника не може да е нечетно число, понеже в този случай дължината на височината към основата на триъгълника няма да бъде естествено число. И така, нека бедрата на триъгълника имат дължина a , а основата има дължина $2b$, където a и b са естествени числа. От Питагоровата теорема имаме, че височината към основата е с дължина $\sqrt{a^2 - b^2}$ и тогава лицето на триъгълника е равно на $b\sqrt{a^2 - b^2}$. Следователно лицето е естествено число. За дължината на височината към бедрото получаваме $\frac{2b\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Нека $d = \text{НОД}(a, b)$ и $a = da_1$, $b = db_1$, като a_1 и b_1 са взаимно прости. Можем да запишем дължината на височината към бедрото във вида $\frac{2b_1d\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1}$. Ясно е, че числото a_1 е взаимно просто както с b_1 , така и с $\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$. Оттук следва, че a_1 дели $2d$. Да допуснем, че a_1 е четно. Тогава b_1 е нечетно, защото иначе a_1 и b_1 нямаше да са взаимно прости. Но тогава няма как числото $\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$ да е естествено, защото $a_1^2 - b_1^2 \equiv -1 \pmod{4}$ и не е възможно това число да е точен квадрат. Ето защо a_1 е нечетно и тогава a_1 дели d . Нека означим $d = ka_1$, k – естествено. Можем да запишем лицето на триъгълника във вида $k^2 a_1^2 b_1 \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, а височината към бедрото във вида $2kb_1 \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$. Да отбележим, че необходимото и достатъчно условие тези две числа (а заедно с тях и височината към основата) да са естествени е $\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$ да е естествено, а това не зависи от k . Понеже искаме лицето да е възможно най-малко, избираме $k = 1$ и сега остава да намерим най-малката възможна стойност на израза $a_1^2 b_1 \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, когато той е естествено число. Ясно е, че $a_1 > 1$ и тъй като е нечетно, то $a_1 \geq 3$. При $a_1 = 3$ числото $9 - b_1^2$ не може да е точен квадрат. При $a_1 = 5$ числото $25 - b_1^2$ е точен квадрат за $b_1 = 3$ и за $b_1 = 4$. И в двата случая лицето на триъгълника е 300. При $a_1 = 7$ директна проверка показва, че числото $a_1^2 b_1 \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$ не може да е цяло, а ако $a_1 \geq 9$, то $a_1^2 b_1 \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \geq 81 \cdot 1 \cdot \sqrt{9^2 - 8^2} = 81\sqrt{17} > 300$. Следователно търсената минимална стойност на лицето на триъгълник е 300. Може да се провери, че тази стойност се достига за триъгълници със страни $(25, 25, 30)$ и $(25, 25, 40)$. За тези триъгълници са изпълнени условията на задачата.

11-12 клас

7. Най-малкото 2009-цифрено число е $\underbrace{100\dots0}_{2008} = 10^{2008}$. Ще пресметнем остатъка при деление на 10^{2008} с 2009, като използваме, че $2009 = 41 \cdot 49$. Имаме:

$$10^5 \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 10^{2005} \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 10^{2008} \equiv 10^3 \equiv 16 \pmod{41}.$$

От теоремата на Ойлер ($10^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$) имаме $10^{42} \equiv 1 \pmod{49}$, защото $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, т.е. $\varphi(49) = \varphi(7^2) = 7^2 - 7 = 42$. От друга страна $2008 \equiv 34 \pmod{42}$ и следователно $10^{2008} \equiv 10^{34} \pmod{49}$. Директно пресмятаме, че $10^{34} \equiv 46 \pmod{49}$ и тогава $10^{2008} \equiv 46 \pmod{49}$. От сравненията $10^{2008} \equiv 16 \pmod{41}$ и $10^{2008} \equiv 46 \equiv -3 \pmod{49}$ намираме остатъка при делението на 10^{2008} с 2009. Тъй като $10^{2008} = 49t - 3$, $t \in \mathbb{N}$, то трябва $49t - 3 \equiv 16 \pmod{41} \Rightarrow 8t \equiv 19 \equiv 60 \pmod{41} \Rightarrow 2t \equiv 15 \equiv 56 \pmod{41} \Rightarrow t \equiv 28 \pmod{41}$.

Следователно $10^{2008} = 49(41k + 28) - 3 = 2009k + 1369$. Получихме, че $10^{2008} \equiv 1369 \pmod{2009}$, откъдето следва, че най-малкото естествено число с 2009 цифри, което е кратно на 2009, е $10^{2008} - 1369 + 2009 = 10^{2008} + 640$. Това число има 2009 цифри, от които точно три: 1, 6 и 4, са различни от нула. Следователно нулите му са 2006.